Föreläsning 2

Vi ska börja med att introducera ny notation

Definition: Vi kallar

$$\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

$\left(\begin{array}{l} k! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot k \\ 0! = 1 \end{array}\right)$

för binomialkoefficienten

Jättelätt! Kan förklaras via kombinatorik.

~~Exempel: På hur många sätt kan~~

Sats (Binomialsatsen). För varje naturligt tal n så

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

Hur gör man? Vi tittar på vad satsen säger

i) Vill visa något för alla naturliga tal

ii) — " — som är jättelätt för små n (vi kan bara beräkna båda sidor)

iii) Om vi vet vad $(1+x)^n$ är så är det jättelätt att beräkna

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x)$$

Skriker induktion.

Bevis: Vi använder matematisk induktion:

1) Satsen är sann för $n=1$:

$$1+x = \sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}x^k = \binom{1}{0}+\binom{1}{1}x = 1+x$$

2) Antag att satsen är sann för något $n \geq 2$

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k.$$

Då är

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k \qquad (2)$$

Om vi tittar på koefficienten för x^k, $k \neq 1$, $k \neq n+1$, högerledet ser vi att den är

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \left\{\begin{matrix}\text{def av}\\ \text{binomial}\\ \text{koeff}\end{matrix}\right\} =$$

extra

$$= \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots(k-1)\cdot k\cdot \cancel{(k+1)\cdots 1}} + \frac{n(n-1)\cdots n-k+2}{(k-1)(k-2)\cdots 1} =$$

$$= \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+2)}{1\cdot 2\cdots(k-1)}\underbrace{\left(\frac{n-k+1}{k}+1\right)}_{\frac{n+1}{k}} = \frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots k} =$$

$$= \left\{\begin{matrix}\text{deff}\\ \text{binomial}\\ \text{koeff}\end{matrix}\right\} = \binom{n+1}{k}$$

x^{n+1} koeff är $\binom{n}{n} = 1 = \binom{n+1}{n+1}$ och x^0 koeff är $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} = 1$.

Exempel: Vad är x^3 koefficienten i $(3+x)^{10}$

Bevis formel 3:

~~svar~~: Vi bryter ut 3

$$(3+x)^{10} = 3^{10}\left(1+\frac{x}{3}\right)^{10} = \left\{\begin{matrix}\text{dsp} \\ \frac{x}{3} = y\end{matrix}\right\} = 3^{10}(1+y)^{10} \quad (2)$$

$$(a+b)^n = a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n = \left\{\begin{matrix}\text{dsp} \\ x = \frac{b}{a}\end{matrix}\right\} = a^n(1+x)^n = \ldots$$

Avsluta beviset som en övning.

Koefficienten för y^3 är enl. binomialsatsen

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$$

Så x^3 termen i (2) är

$$3^{10} \cdot 120 \cdot \left(\frac{x}{3}\right)^3 = 3^7 \cdot 120\, x^3$$

svar: $3^8 \cdot 40$.

Persson-Böiers generella formeln

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad (3)$$

vilken vi skulle kunna använda direkt med $a = 3$ och $b = x$

Sats: ~~För~~ Det gäller, om $x \neq 1$, att

$$\sum_{k=0}^{n} ax^k = \underbrace{a + ax + ax^2 + \dots + ax^n}_{\text{kallas geometrisk summa}} = a\,\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

Bevis: Observera att

$$(x-1)\sum_{k=0}^{n} ax^k = ax^{n+1} + \cancel{ax^n} + \cancel{ax^{n-1}} \dots + \cancel{ax} - a$$

$$- \cancel{ax^n} - \cancel{ax^{n-1}} - \dots$$

$$= a\,\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

~~Sä~~ Tänker nu att $|x|<1$, säg $x=\frac{1}{2}$, $a=1$

då får vi

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 1\,\frac{\frac{1}{2^{n+1}}-1}{\frac{1}{2}-1} = 2 - \frac{1}{2^n}$$

men då "n går mot oändligheten" så "går $-\frac{1}{2^n}$ mot 0". Vi borde alltså få

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 2.$$

Detta är ett helt fantastiskt resultat! Plötsligt så kan vi addera oändligt många tal!

Rationella funktioner.

Vi pratade lite om polynom, faktorsatsen etc. på intromatten. Därför tänkte jag bara räkna ett exempel.

Exempel. Skissa grafen till $f(x) = \dfrac{x^2-4}{2x^3+8x^2+2x-12}$

i dess naturliga definitionsmängd.

Svar: Vi börjar med att förenkla täljare och nämnare:

$$x^4-4 = (x+2)(x-2)$$

för att skriva om nämnaren så gissar vi att $x=1$ är en lösning:

$$2\cdot 1^3 + 8\cdot 1^2 + 2 - 12 = 0$$

så enligt faktorsatsen så finns det ett $p(x)$

$$2x^3+8x^2+2x-12 = p(x)(x-1).$$

Vi räknar fram $p(x)$

$$\begin{array}{l|l}
\multicolumn{1}{l}{\overline{2x^2+10x+12}} & \\
2x^3+8x^2+2x-12 & x-1 \\
\hline
-2x^3+2x^2 & \\
\quad 10x^2+2x-12 & \\
\quad -10x^2+10x & \\
\qquad 12x-12 & \\
\qquad -12x+12 & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

Så $p(x) = 2(x^2+5x+6)$

$p(x)=0$ då $x = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{24}{4}} = -\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} = \begin{cases} -2 \\ -3 \end{cases}$

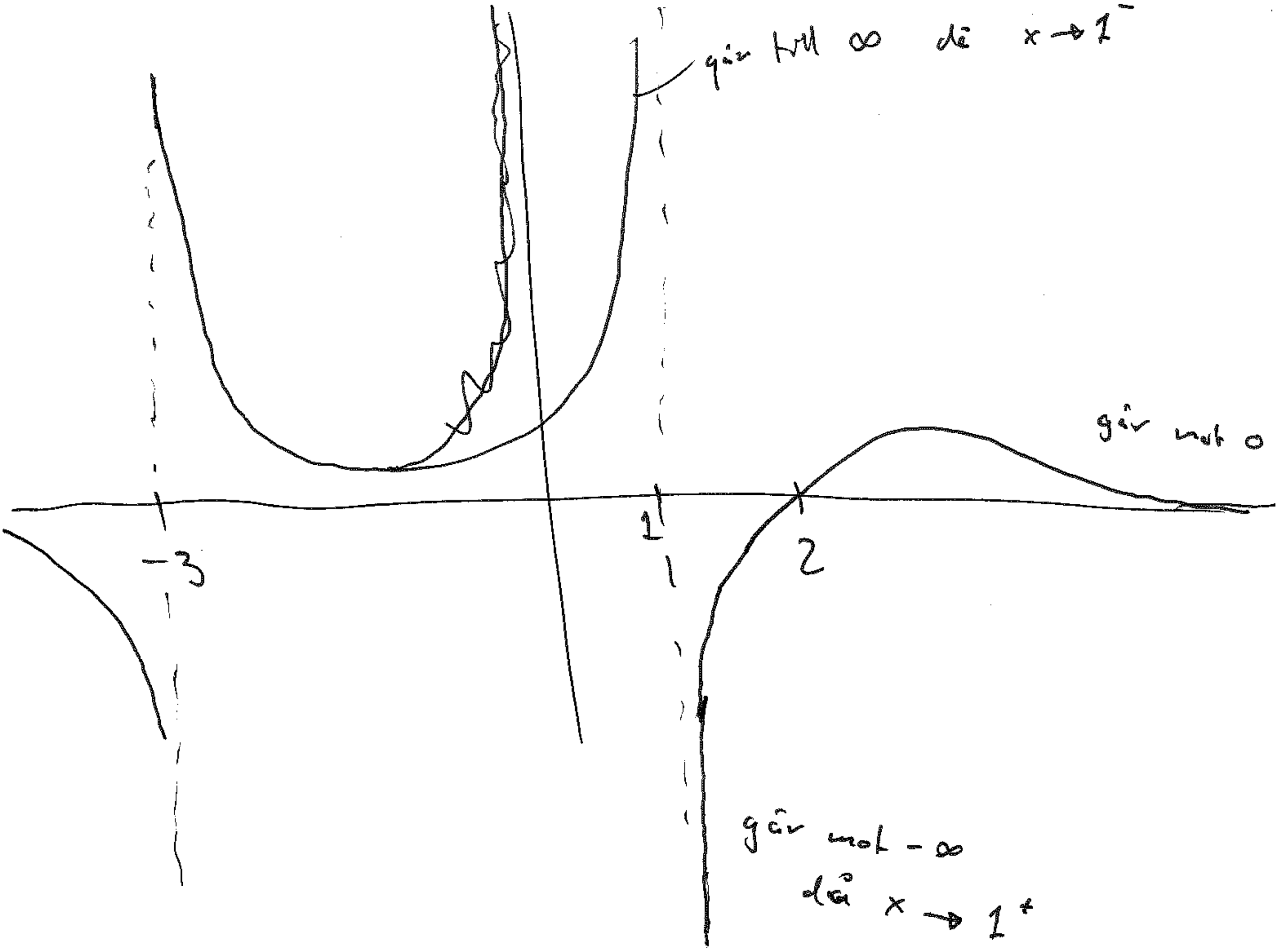
Så $p(x) = 2(x+2)(x+3)$.

Vi kan därför skriva den rationella funktionen

$$\frac{\cancel{(x+2)}(x-2)}{2(x-1)(x+3)\cancel{(x+2)}}$$ definierad för $x \in \mathbb{R} \setminus \{1,-3,-2\}$

Vi gör en teckenanalys

x	<-3	$x=-3$	$-3<x<1$	$x=1$	$1<x<2$	$x=2$	$x>2$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$2(x-1)(x+3)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$ $\frac{x-2}{2(x-1)(x+3)}$	$-$	odef	$+$	odef	$-$	0	$+$

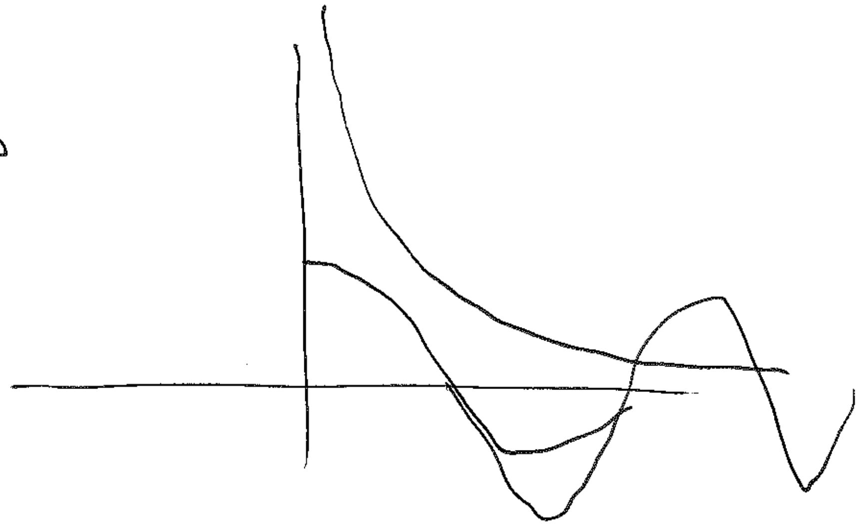


Igen så konfronteras vi med $f(x) \to 0$
eller $f(x) \to \pm\infty$

men vad betyder det? Vad är definitionen? Kan vi göra det matematiskt på något sätt.

Låt oss titta på två exempel

$f(x) = \frac{1}{x^2}$ säg $x > 0$



$g(x) = \cos(x)$

går $f(x) \to 0$ då $x \to \infty$? (Intuitivt)

$\cos(x) \to 0$ eller vad $x \to \infty$.

Vad vill vi att $f(x) \to 0$ då $x \to \infty$ ska betyda?

1) Måste $f(x)$ verkligen vara 0?

2) Hur litet måste $f(x)$ vara? Mindre än $\frac{1}{1000}$ $\frac{1}{10000}$? Mindre än alla tal? ε?

3) Måste $f(x)$ vara större än något?

4) När ska $f(x)$ vara mindre än (större än ε?) När x är "stort?"

Låt oss försöka sammanfatta

Definition: Vi säger att $f(x) \to 0$ när $x \to \infty$ (eller $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$)

Om det för varje tal $\varepsilon > 0$ finns ett $C_\varepsilon > 0$ så att

$$x > C_\varepsilon,\ x \in D_f \Longrightarrow |f(x)| < \varepsilon .$$

[och D_f innehåller godtyckligt stora x-värden.]

Exempel: $\frac{1}{x^2} \to 0$ då $x \to \infty$.

Bevis: Vi måste bevisa att det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $C_\varepsilon > 0$ så att

$$\frac{1}{|x|^2} \cancel{|f(x)|} < \varepsilon \quad \text{för alla } x > C_\varepsilon . \qquad (*)$$

Hur visar vi att ett tal finns?

Det lättaste sättet är att räkna ut ett C_ε som har egenskapen $(*)$.

Vi börjar med att räkna fram vilka x som har egenskapen att

$$\frac{1}{|x|^2} < \varepsilon \underset{\substack{\varepsilon > 0 \\ x^2 > 0}}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{\varepsilon} < x^2 \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} < x \\ \cancel{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} < -x} \end{cases}$$

Så om

$x > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ så är $\frac{1}{|x|^2} < \varepsilon$. Vi vill hitta C_ε så

$x > C_\varepsilon$ så är $\frac{1}{x^2} < \varepsilon$.

Uppenbarligen så har $C_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ den egenskapen. $\boxtimes$