Exempel: Beräkna $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{2}{(2x+1)^2}\,dx$.

Svar (Varning, jag kommer att räkna fel!)

Vi ser direkt att $-\frac{1}{(2x+1)}$ är en primitiv till $\frac{2}{(2x+1)^2}$ eftersom $\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{2x+1}\right) =$

$$= -\frac{-1}{(2x+1)} \cdot \frac{d(2x+1)}{dx} =$$

$$= \frac{2}{(2x+1)^2}.$$

Så enligt insättningsformeln så

$$\int_{-1}^{1} \frac{2}{(2x+1)^2}\,dx = \underbrace{-\frac{1}{(2\cdot 1+1)}}_{-\frac{1}{3}} + \Bigg(+\underbrace{\frac{1}{(-2+1)}}_{=-1}\Bigg) = -\frac{4}{3}.$$

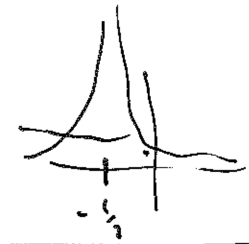
Är svaret rimligt? Vad har gått fel?

Ta 3 minuter.

Alltid, Alltid, Alltid när man använder en sats så ska man verifiera att antagandena är uppfyllda.

Här så är inte $-\frac{1}{2x+1}$ en primitiv till $\frac{2}{(2x+1)^2}$ i punkten $x=-\frac{1}{2}$!

Så rätt svar är: $\int_{-1}^{1} \frac{2}{(2x+1)^2}\,dx$ är <u>inte</u> integrerbar. Vi kan se detta



Det intressanta är att vissa ~~integraler~~ funktioner som ~~antar~~ inte är begränsade går fortfarande att definiera.

<u>Definition</u>: Antag att $f(x)$ är definierad på $[a,b[$ och att $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$ är definierad för alla $\varepsilon > 0$. Då säger vi att den generaliserade integralen $\int_a^b f(x)\,dx$ existerar och antar värdet A. Om

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = A.$$

Men

(På samma sätt f definierad på $]a,b]$ och $\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$ existerar.)

Exempel. $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ existerar som en generaliserad integral för $\alpha < 1$.

Och $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{1-\alpha}$.

Lösning: Om $\alpha \neq 1$

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \left[\frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\right]_{x=\varepsilon}^{1} = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

Där vi har använt insättningsformeln och att $\frac{1}{x^\alpha}$ är kontinuerlig och därför integrerbar, på $[\varepsilon, 1]$.

Standardgränsvärdet $\varepsilon^{1-\alpha} \to 0$ då $\varepsilon \to 0^+$ för $1-\alpha > 0$ ger att

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{1-\alpha}.$$

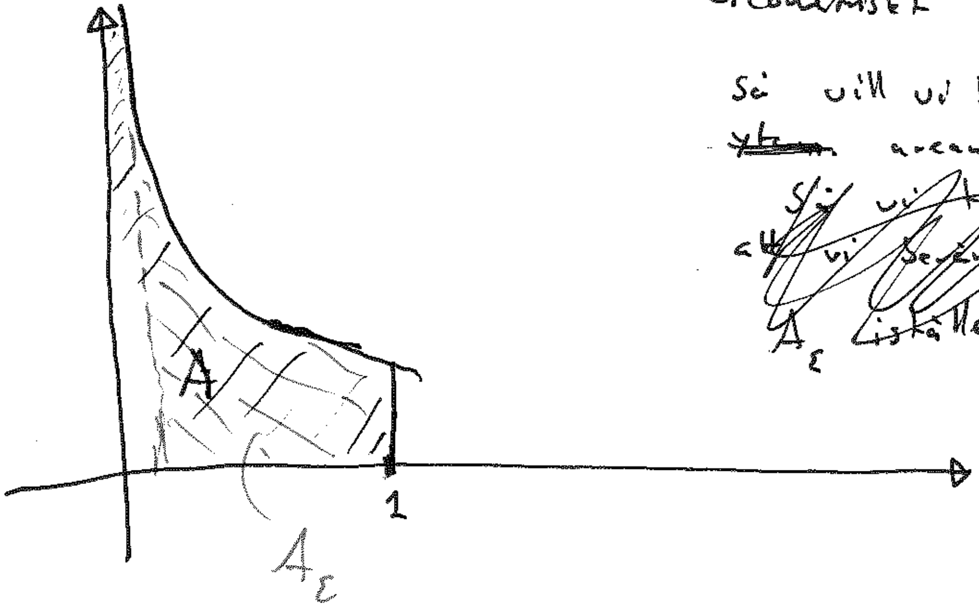
Om $\alpha > 1$ så $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon^{1-\alpha} = \infty$

så den generaliserade integralen existerar inte.

Om $\alpha = 1$ så är

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,dx = \ln\frac{1}{\varepsilon} \to \infty \text{ då } \varepsilon \to 0$$ enligt

~~ett känt~~ standardgränsvärde.



Geometriskt

Så vill vi beräkna ~~ytan~~ arean A.
~~Så vi tar oss att vi beräknar~~ A_ε istället.

Men vi kan inte göra det eftersom det finns ingen trappfunktion ψ_ε så att $\psi_\varepsilon \geq \frac{1}{x^\alpha}$ eftersom $\frac{1}{x^\alpha}$ saknar en övre begränsning.

Som så ofta i analysen så tar vi ett steg tillbaka och beräknar A_ε istället, vilken vi kan beräkna eftersom $\frac{1}{x^\alpha}$ är kontinuerlig på $[\varepsilon, 1]$. Och sen tittar på gränsvärdet $\varepsilon \to 0$. Om det existerar så ~~existerar~~ kan vi tillskriva ett tal till arean. Vi kan givetvis göra samma sak om vi har flera singulariteter.

Definition. Antag att $f(x)$ är kontinuerlig på, $[a, b]$ utom i punkterna $a_1, a_2, \ldots, a_k$ ~~där f(x) är~~ och att $f(x)$ inte är begränsad i någon omgivning av $a_1, \ldots, a_k$. Då säger vi att den generaliserade integralen

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

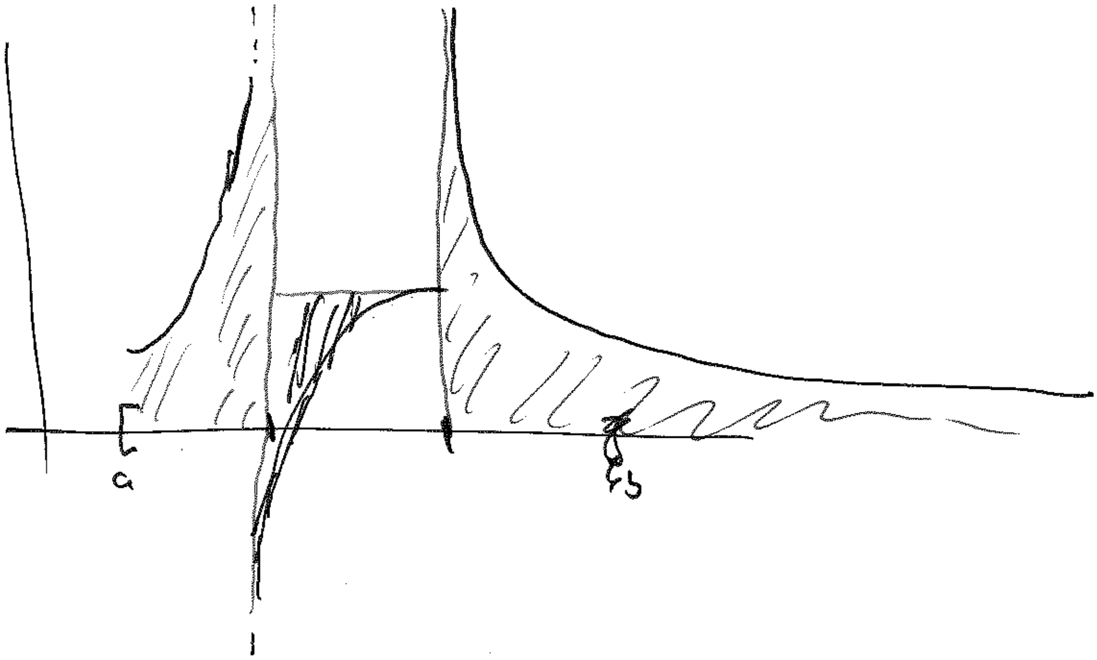
existerar, eller är konvergent,

Om

$$\lim_{\delta\to 0}\left(\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a_{j-1}+\varepsilon}^{a_j+\delta} f(x)\,dx\right)=A_j \text{ existerar.}$$ (X om $b=\infty$)

Vi skriver då

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 + A_2 + \dots + A_k.$$



Exempel. Beräkna $\displaystyle\int_0^\infty \frac{3}{\sqrt{x}\,(x+1)}\,dx.$

Eftersom integranden går till ∞ i $x=0$ och området är obegränsat så är integralen generaliserad. Vi måste därför undersöka

$$\lim_{X\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^X \frac{3}{\sqrt{x}\,(x+1)}\,dx$$

Då integranden innehåller en rot så gör vi standard substitutionen

$t = \sqrt{x}$ vilken är definierad för $x \geq 0$ (hela integrationsområdet)

$dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx$

$x = \varepsilon \Rightarrow t = \sqrt{\varepsilon}$

$x = X \Rightarrow t = \sqrt{X}$. så

$$\int_{\varepsilon}^{X} \frac{3}{\sqrt{x}(x+1)}\, dx = 6 \int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{X}} \frac{1}{t^2+1}\, dt = \left\{ \begin{matrix} \text{insättningsformeln} \end{matrix} \right\} =$$

$$= 6 \arctan(\sqrt{X}) - 6 \arctan\sqrt{\varepsilon}$$

så $$\lim_{X \to \infty} \left(\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{X} \frac{3}{\sqrt{x}(x+1)} dx \right) = \lim_{X \to \infty} \left(\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\underbrace{6 \arctan(\sqrt{X})}_{\to \frac{\pi}{2}} - 6 \underbrace{\arctan(\sqrt{\varepsilon})}_{\to 0} \right) \right)$$

$= 3\pi.$

Så integralen existerar och antar värdet 3π.

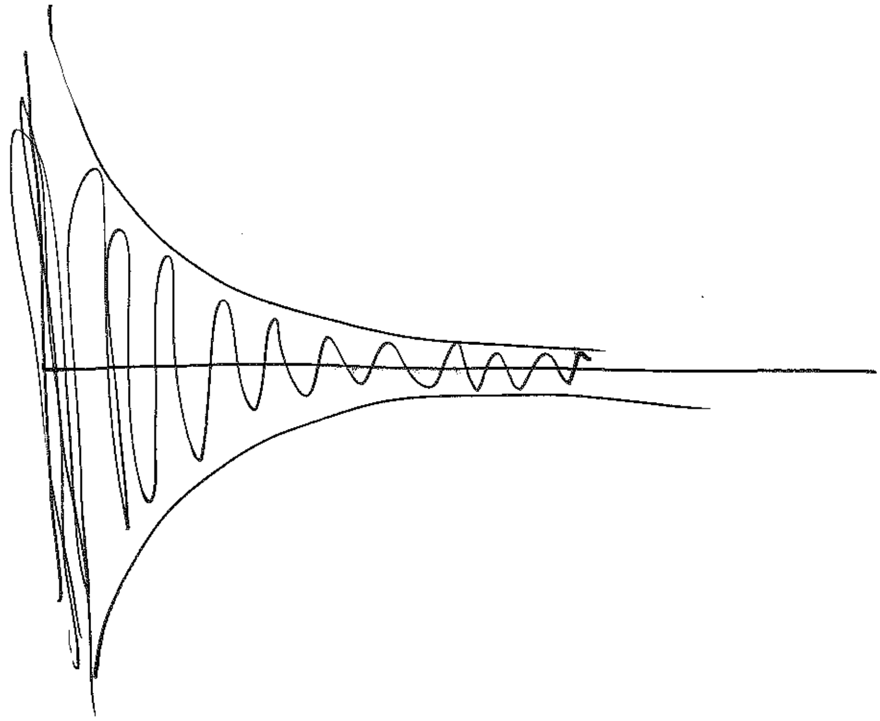
Exempel $$\int_0^1 \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx.$$

Svar: Vi ser att integralen är generaliserad då integranden är singulär i $x = 0$. Vi ska därför beräkna

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx = \left\{ \begin{matrix} t = \frac{1}{x} \\ dt = -\frac{1}{x^2} dx \\ x = \varepsilon \Rightarrow t = \frac{1}{\varepsilon} \\ x = 1 \Rightarrow t = 1 \end{matrix} \right\} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{1}^{1/\varepsilon} \sin(t)\, dt =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[-\cos\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + \cos(1) \right].$$ Men $\cos\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ är inte konvergent

så integralen existerar inte.



Jämförelse sats.

Sats: Om $0 \leq f(x) \leq g(x)$ och den generaliserade integralen $\int_a^b g(x)\,dx$ existerar så existerar $\int_a^b f(x)\,dx$.

Om $\int_a^b f(x)\,dx$ inte existerar så existerar inte $\int_a^b g(x)\,dx$.

(Här kan $b = \infty$ och $a = -\infty$).

Bevis (Ett fall). Antag att vi betraktar

$\int_0^1 f(x)dx$ och $f(x)$ är obegränsad i $x=1$.

antag vidare att $0 \leq f(x) \leq g(x)$ och att

$\int_0^1 g(x)dx$ är konvergent. Vi vill visa

att $\int_0^1 f(x)dx$ är konvergent, dvs att följande

gränsvärde existerar: $\lim_{h\to 1} \int_0^h f(x)dx$.

Eftersom $\int_0^h f(x)dx$ är växande som en

funktion av h så räcker det att visa

att $\int_0^h f(x)dx$ är begränsad för alla h.

(Eftersom växande och begränsad $\Rightarrow$ konvergent).

Men $\int_0^h g(x)\,dx \leq \int_0^1 g(x)dx$ eftersom $g(x) \geq 0$.

så

$$\int_0^h f(x)dx \leq \Big\{ f(x) \leq g(x) \Big\} \leq \int_0^h g(x)dx \leq \underbrace{\int_0^1 g(x)dx}_{\text{existerar enl. antagande}}$$

så $\int_0^h f(x)dx$ är begränsad.

Exempel Visa att $\int_0^1 \frac{1}{x^{1/\pi}}(\sin(\frac{1}{x})+1)\,dx$ konvergerar.

Svar: ~~Ty~~ Eftersom $0 \leq \frac{1}{x^{\frac{1}{\pi}}}(\sin(\frac{1}{x})+1) \leq \frac{2}{x^{\frac{1}{\pi}}}$ för $x \in]0,1]$

så räcker det att visa att $\int^1 \frac{2}{x^{\frac{1}{\pi}}}\,dx$ konvergerar.

Men eftersom $\frac{1}{\pi} < 1$ så vet vi att

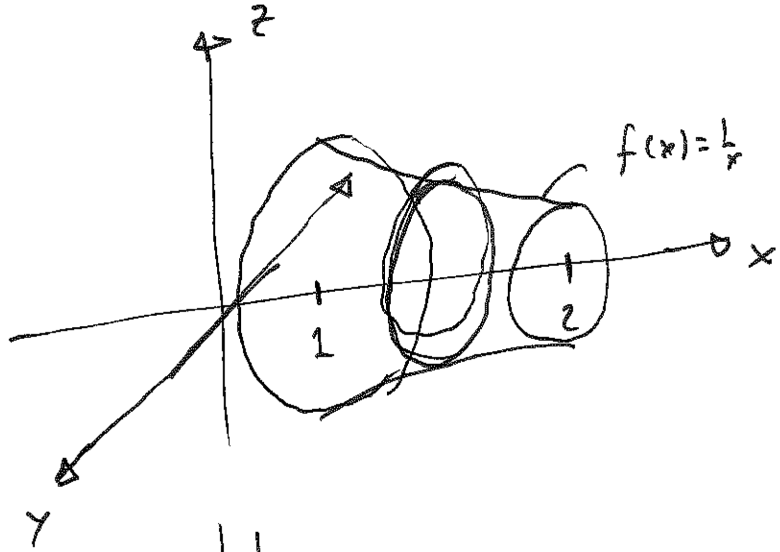
~~integ~~ den integralen konvergerar (första exemplet).

Tillämpningar (Volymer och längder)

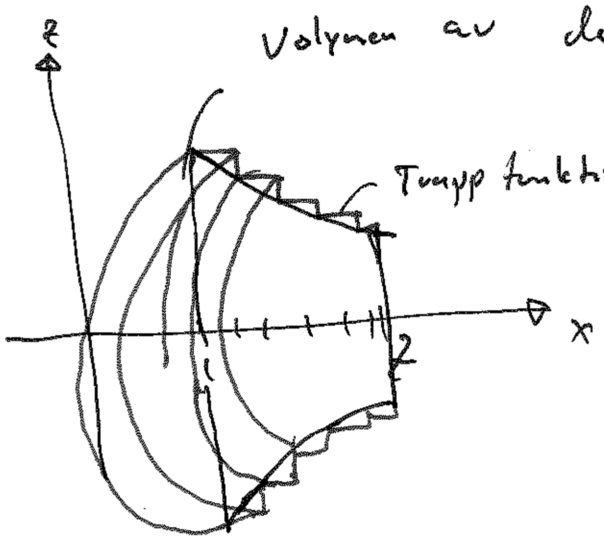
Betrakta kroppen $\sqrt{\cancel{x}^2+z^2} \le \frac{1}{x}$, $x \in [1,2]$

Vad är dess volym?

För ett fixerat x så får vi att de y,z så att $\sqrt{y^2+z^2} \le \frac{1}{x}$ är en cirkelskiva



$\Downarrow$



Volymen av den här cylindern är

$$\pi r^2 h = \pi c_j^2 (a_j - a_{j-1})$$

så om $\psi_\varepsilon(x) \ge f(x) \ge \phi(x)$ och $\psi_\varepsilon(x)$ och ϕ_ε är trappfunktioner så blir volymen

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{k} \pi c_j^2 (a_j - a_{j-1})}_{I(\pi \psi^2(x))} \ge \text{Volym} \ge \underbrace{\sum_{j=1}^{k} \pi c_j^2 (a_j - a_{j-1})}_{I(\pi \phi^2(x))}$$

Detta leder oss till att volymen, om den existerar skulle vara

$$\pi\int_1^2 f^2(x)\,dx = \pi\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx = \pi\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{1}\right) = \frac{3\pi}{4}.$$

<u>Definition</u>: Vi säger att volymen av

$$V = \{(x,y,z);\ \sqrt{y^2+z^2} \le f(x),\ a \le x \le b\}$$

ges av $\pi\int_a^b (f(x))^2\,dx$.

Vi kallar en kropp på formen V för en rotationskropp. ~~att volymen~~