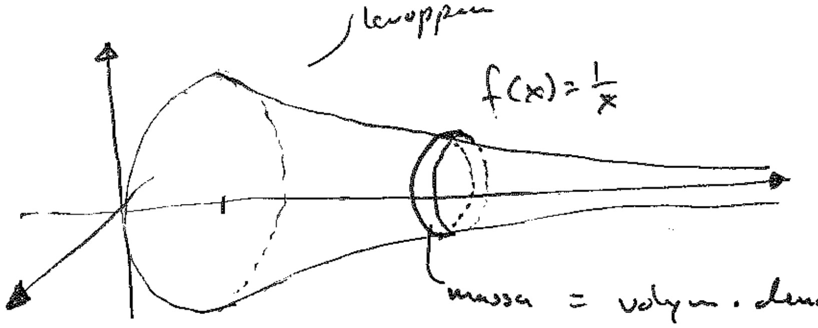
Föreläsning 21

Massa: Låt K vara kroppen som ges av att rotera ytan under $0 \le y \le \frac{1}{x} = f(x)$, $1 \le x$. Antag vidare att K har densitet som ges av $d(x) = \ln(x)$. Vad är kroppens massa.

Svar:



massa = volym · densitet

$$\approx \pi \cdot r^2 \, d(x) dx = \pi \frac{\ln(x)}{x^2} dx$$

Så vi ska beräkna

$$\pi \int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x^2} dx = -\pi \int_1^\infty \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) \ln(x) \, dx.$$

Integralen är generaliserad så vi måste betrakta

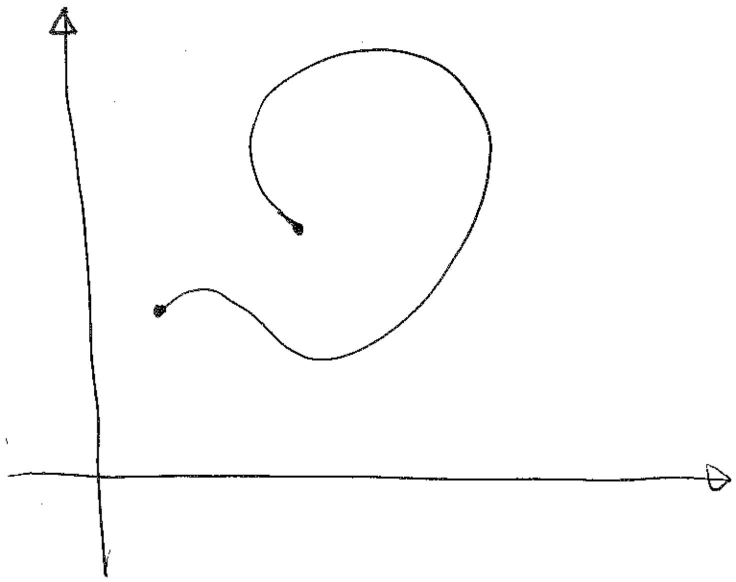
$$\lim_{R \to \infty} \left(-\pi \int_1^R \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) \ln(x) \, dx \right) = \left\{ \begin{matrix} \text{part} \\ \text{int} \end{matrix} \right\} =$$

$$= \lim_{R \to \infty} \left(-\pi \frac{\ln(R)}{R} + \underbrace{\pi \frac{\ln(1)}{1}}_{=0} + \pi \int_1^R \frac{1}{x^2} dx \right) = \left\{ \begin{matrix} \text{summa} \\ \text{regel} \end{matrix} \right\} =$$

$$= \lim_{R \to \infty} \left(-\pi \frac{\ln R}{R} \right) + \lim_{R \to \infty} \left(\pi \left(1 - \frac{1}{R} \right) \right) = \pi.$$

Kurvlängd.

Hur lång är den här kurvan?



Snarare, hur beräknar man längden av en kurva?

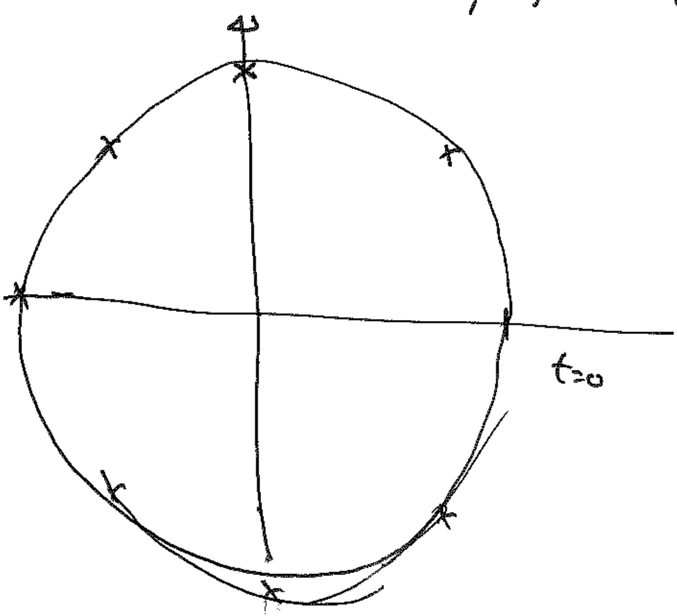
Hur beskriver man en kurva matematiskt?

Parameterisering av kurvor.

Låt $\underbrace{\bar{r}(t)=(x(t),y(t))}_{\text{Parameterisering}}$ $\quad t\in\underbrace{[\alpha,\beta]}_{\text{Parameterintervall}}$

Tex: $\bar{r}(t)=(\cos(t),\sin(t))$ $\quad t\in[0,2\pi]$

Då kan vi rita grafen av $\bar{r}(t)$



$t=0 \Rightarrow \bar{r}(0)=(1,0)$

$t=\frac{\pi}{4} \Rightarrow \bar{r}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

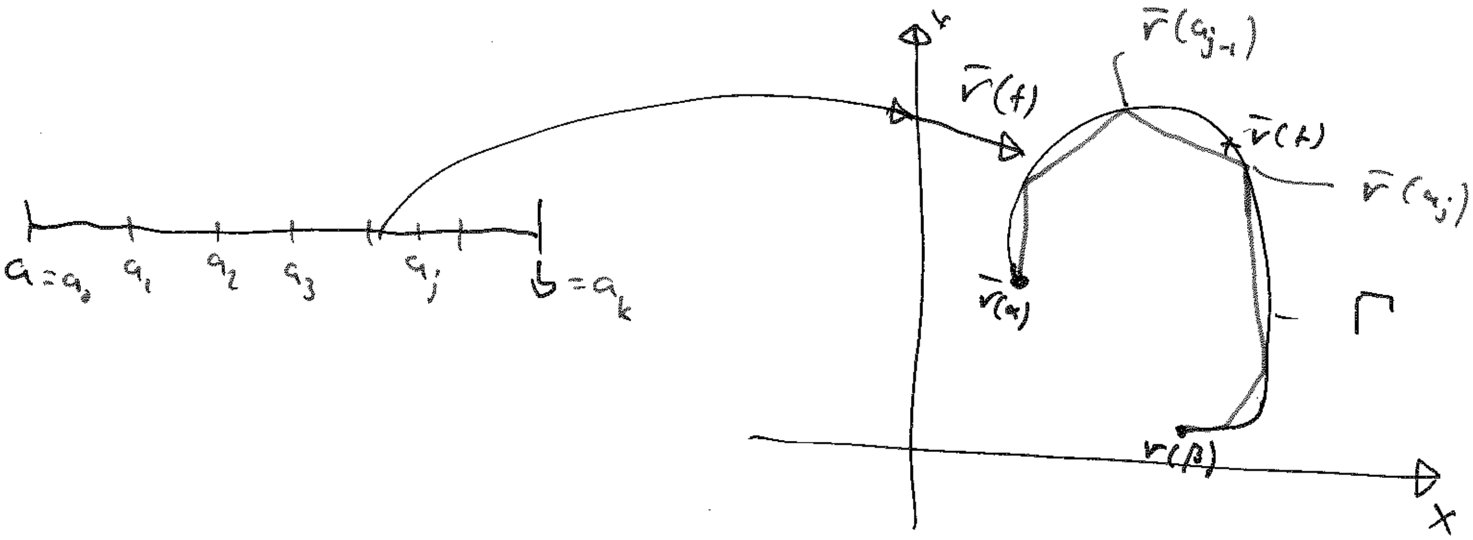
$t=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \bar{r}=(0,1)$

$t=\pi \Rightarrow \bar{r}=(-1,0)$

Så vi kan beskriva en kurva (ett geometriskt objekt) med hjälp av en funktion $\bar{r}(t)$ (ett begrepp från analysen).

~~Så~~ Låt oss återgå till kurvlängden

Låt oss anta att en kurva Γ har parametriseringen $\bar{r}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$.



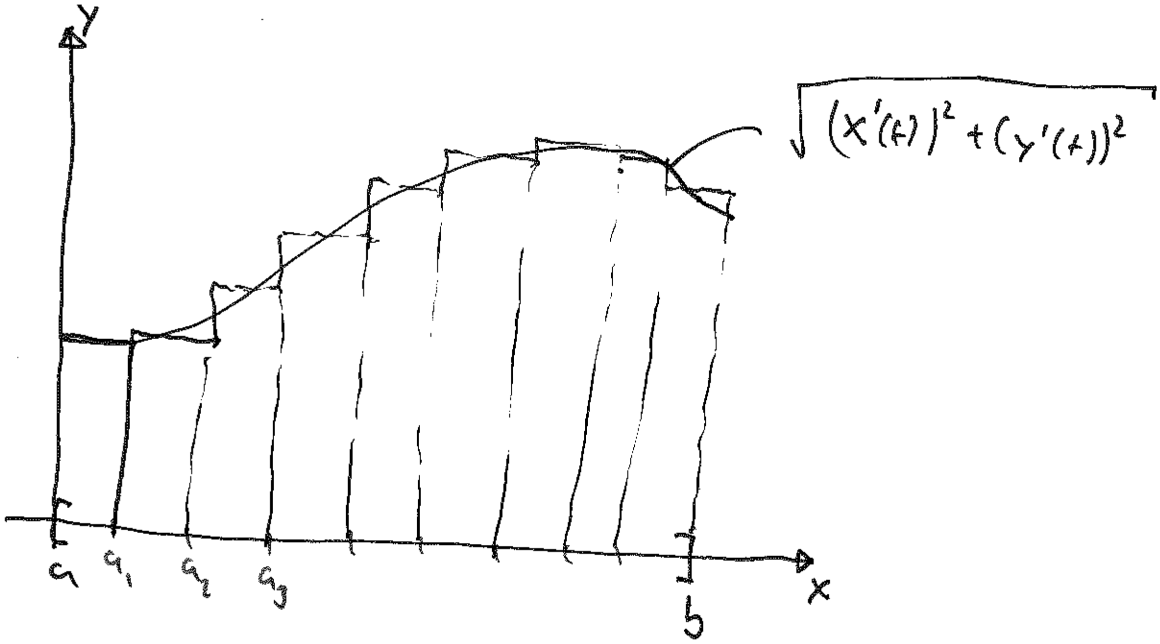
Vi kan inte ännu beräkna längden av Γ (vi har inte definierat längd ännu). Vad vi kan göra är att approximera Γ med räta linjen mellan $\bar{r}(a_{j-1})$ och $\bar{r}(a_j)$ längden av den räta linjen är, enl. pytagoras sats,

$$(a_j - a_{j-1})\sqrt{\left(\frac{x(a_j) - x(a_{j-1})}{a_j - a_{j-1}}\right)^2 + \left(\frac{y(a_j) - y(a_{j-1})}{a_j - a_{j-1}}\right)^2} = (a_j - a_{j-1})\sqrt{\left(\frac{d\,x(\xi_j)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\,y(\eta_j)}{dt}\right)^2}$$

för några punkter $\xi_j \in [a_{j-1}, a_j]$, $\eta_j \in [a_{j-1}, a_j]$

Längden av hela approximerande kurvan blir då

$$\sum_{j=1}^{k} (a_j - a_{j-1}) \sqrt{\left(\frac{dx(\xi_j)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(\eta_j)}{dt}\right)^2}$$



Så vi kommer fram till följande definition.

Definition: Låt Γ vara en kurva som är parametriserad av $\bar{r}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a,b]$. Antag vidare att $x(t)$ och $y(t)$ är kontinuerligt deriverbara på $[a,b]$ då säger vi att längden av Γ är

$$\int_a^b \sqrt{x'(t) + y'(t)}\, dt.$$

Exempel: Låt kurvan Γ ges av

$$\bar{r}(t) = (\underbrace{t^2+1}_{x(t)}, \underbrace{t+2t^2}_{y(t)}) \qquad t \in [0,1]$$

hur lång är Γ?

Svar: Enligt definitionen för kurvlängd så är längden

$$\int_0^1 \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt = \int_0^1 \sqrt{4t^2 + 16t^2 + 8t + 1}\, dt$$

$$= 2\sqrt{5}\int_0^1 \sqrt{\cancel{20}t^2 + \tfrac{2}{5}t + \tfrac{1}{20}}\, dt = 2\sqrt{5}\int_0^1 \sqrt{\left(t+\tfrac{1}{5}\right)^2 - \tfrac{1}{25} + \tfrac{1}{20}}\, dt =$$

$$= \left\{\begin{array}{l} t+\frac{1}{5} = s \\ t=0 \Rightarrow s = \frac{1}{5} \\ t=1 \Rightarrow s = \frac{6}{5} \end{array}\right\} = 2\sqrt{5}\int_{1/5}^{6/5} \sqrt{s^2 + \tfrac{1}{100}}\, ds$$

Sätt $z = s + \sqrt{s^2 + \frac{1}{100}} \Rightarrow z - s = \sqrt{s^2 + \frac{1}{100}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow z^2 - 2sz + \cancel{s^2} = \cancel{s^2} + \tfrac{1}{100} \Rightarrow \frac{z^2 - \frac{1}{100}}{2z} = s$$

Så $ds = \left(\dfrac{4z^2 - 2z^2 + \frac{2}{100}}{4z^2}\right) dz = \dfrac{z^2 + \frac{1}{100}}{2z^2}\, dz$

$$\sqrt{s^2 + \tfrac{1}{100}} = z - s = z - \frac{z^2 - \frac{1}{100}}{2z} = \frac{z^2 + \frac{1}{100}}{2z}$$

$s = \frac{1}{5} \Rightarrow z = \frac{1}{5} + \sqrt{\frac{1}{20}}$, $s = \frac{6}{5} \Rightarrow z = \overbrace{\frac{6}{5} + \sqrt{\frac{36}{25} + \frac{1}{100}}}^{=\frac{6}{5} + \sqrt{\frac{29}{20}}}$

Sei

$$2\sqrt{5}\int_{1/5}^{6/5}\sqrt{s^2+\tfrac{1}{100}}\,ds = 2\sqrt{5}\int_{\frac{1}{5}+\sqrt{\frac{1}{20}}}^{\frac{6}{5}+\sqrt{\frac{29}{20}}} \underbrace{\frac{z^2+\frac{1}{100}}{2z}\cdot\frac{z^2+\frac{1}{100}}{2z^2}}_{\frac{z^4+\frac{1}{50}z^2+10^{-4}}{4z^3}}\,dz =$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2}\int_{\frac{1}{5}+\sqrt{\frac{1}{20}}}^{\frac{6}{5}+\sqrt{\frac{29}{20}}} \Big(\underbrace{z}_{\frac{z^2}{2}} + \underbrace{\frac{1}{50z}}_{\frac{1}{50}\ln|z|} + \underbrace{\frac{10^{-4}}{z^3}}_{-\frac{1}{2}\frac{10^{-4}}{z^2}}\Big)\,dz =$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2}\left[\frac{z^2}{2}+\frac{1}{5}\ln|z| - \frac{10^{-4}}{2}\cdot\frac{1}{z^2}\right]_{\frac{1}{5}+\sqrt{\frac{1}{20}}}^{\frac{6}{5}+\sqrt{\frac{29}{20}}} = \dots$$

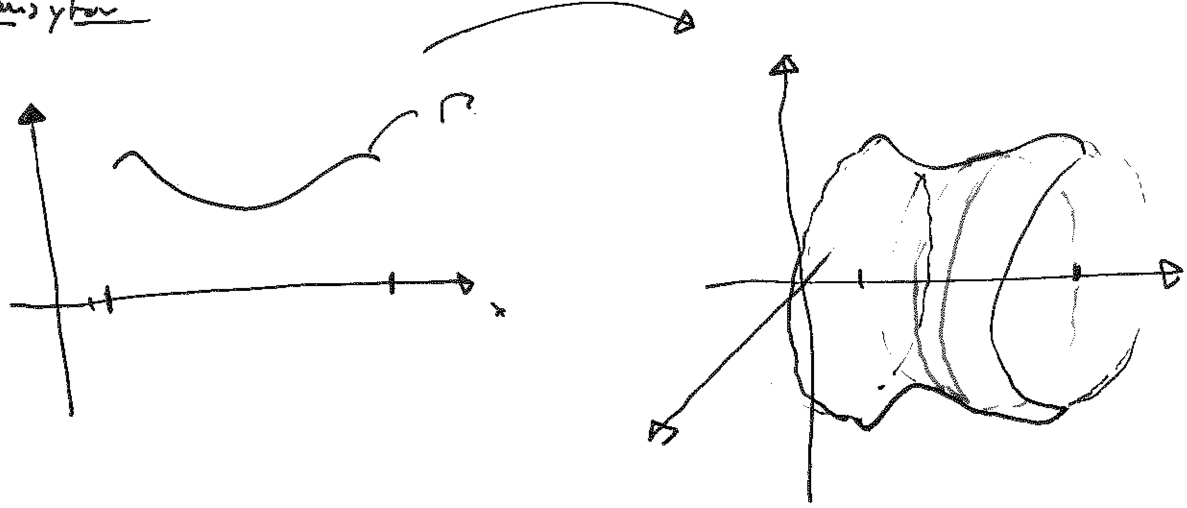
Sei

$$2\sqrt{5}\int_{\frac{1}{5}}^{\frac{6}{5}} \sqrt{s^2+\tfrac{1}{100}}\,ds = 2\sqrt{5}\int_{\frac{1}{5}+\sqrt{\frac{1}{20}}}^{\frac{6}{5}+\sqrt{\frac{29}{20}}} \underbrace{\frac{z^2+\frac{1}{100}}{2z}\cdot\frac{z^2+\frac{1}{100}}{2z^2}}_{\frac{z^4+\frac{1}{50}z^2+10^{-4}}{4z^3}}\,dz =$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2}\int_{\frac{1}{5}+\sqrt{\frac{1}{20}}}^{\frac{6}{5}+\sqrt{\frac{29}{20}}} \Big(\underbrace{z}_{\frac{z^2}{2}} + \underbrace{\frac{1}{50z}}_{\frac{1}{50}\ln|z|} + \underbrace{\frac{10^{-4}}{z^3}}_{-\frac{1}{2}\frac{10^{-4}}{z^2}}\Big)\,dz =$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2}\left[\frac{z^2}{2} + \frac{1}{5}\ln|z| - \frac{10^{-4}}{2}\cdot\frac{1}{z^2}\right]_{\frac{1}{5}+\sqrt{\frac{1}{20}}}^{\frac{6}{5}+\sqrt{\frac{29}{20}}} = \ldots$$

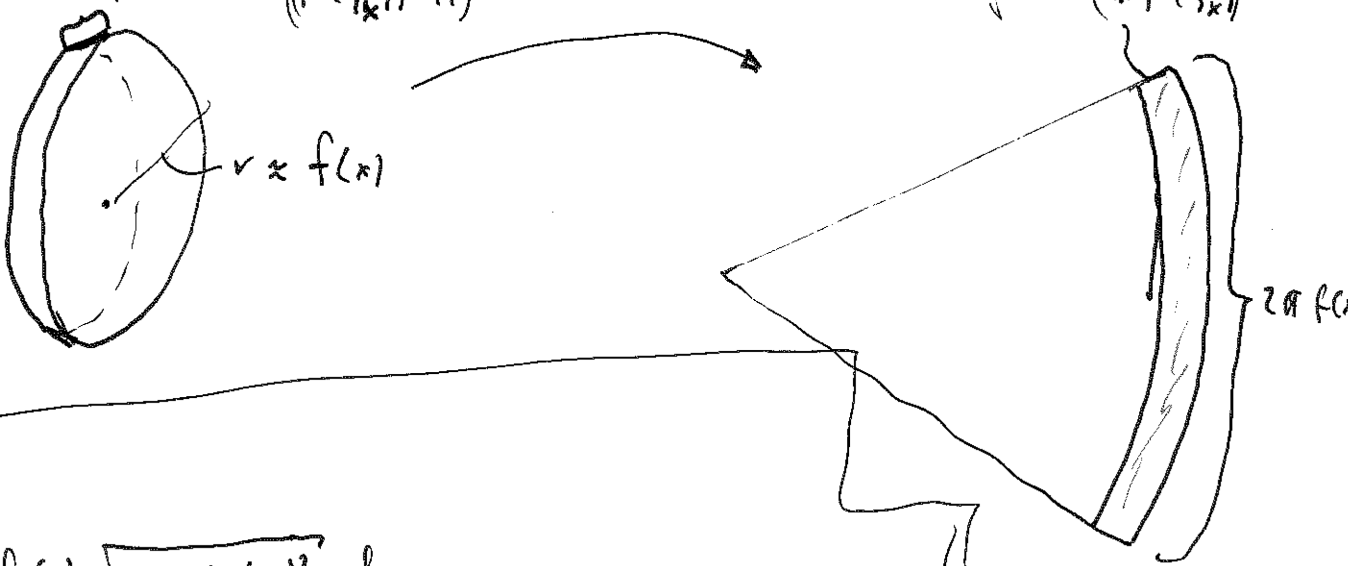
Rotationsytor



Om vi vill beräkna ytan som fås då en kurva Γ roteras en gång kring x-axeln så tänker vi på precis samma sätt och summerar ytan av små delar av kurvan

längd $\approx h \cdot \left((f'(\xi_x))^2+1\right)^{\frac{1}{2}}$

$h\sqrt{1+(f'(\xi_x))^2}$



$$2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

Arean av en rotationsyta.

Integraler och ~~serier~~ Serier

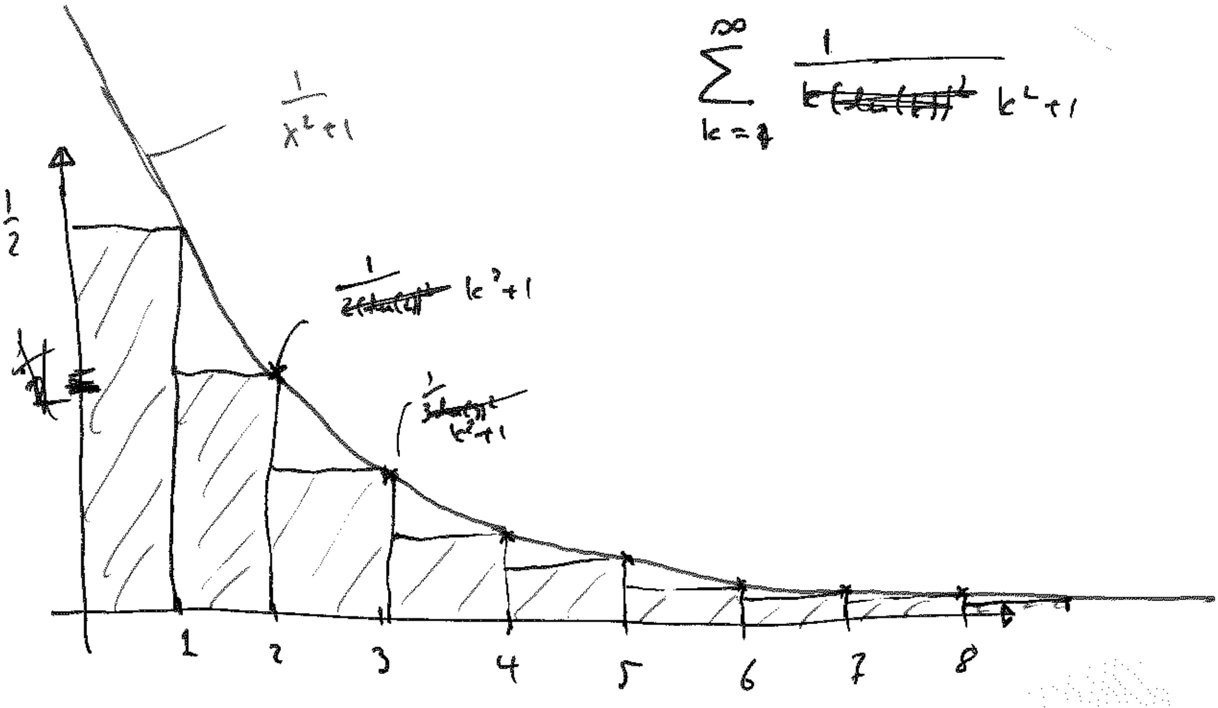
Vi har diskuterat lite om vilka serier som är konvergenta. T.ex så kan vi fråga oss

Konvergerar $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\cancel{k(\ln(k))^2}\,(k^2+1)}$?

I allmänhet så kan det vara svårt att avgöra om en serie är konvergent eller inte, och det är i princip omöjligt att beräkna serien (utom vissa specialfall såsom geometriska serier). ~~eller~~

Men kan vi approximera värdet av en serie. Så vi omtolkar serien i termer av integraler - för vilka vi har kraftfulla metoder att beräkna.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\cancel{k(\ln(k))^2}\; k^2+1}$$



$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}$ = ytan under trapp funktionen. $\Psi(x) = \frac{1}{k^2+1}$ för $k-1 \leq x < k$

Så
$$\sum_{k=1}^{j} \frac{1}{1+k^2} = S_j \leq \int_0^j \frac{1}{1+x^2}\,dx \leq \lim_{j\to\infty} \int_0^j \frac{1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \lim_{j\to\infty} \arctan(j) = \pi/2 .$$

Så S_j är en växande (eftersom $\frac{1}{1+k^2} \geq 0$) och begränsad sekvens och kommer därför att konvergera till ett värde $\leq \frac{\pi}{2}$. (övre begränsningen).

Vi formaliserar detta som en sats.

Sats: [Cauchys integralkriterium.] Antag att

1) $f(x)$ är kontinuerlig på $[1, \infty[$
2) $f(x) \geq 0$
3) $f(x)$ är avtagande

Då kommer $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ $\underbrace{\text{att konvergera}}_{\text{om och}}$ endast om $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ konvergerar.

Vad måste vi bevisa? Vad är ideen?

1) Vi vill använda satsen att

om $S_j = \sum_{k=1}^{j} f(k)$ är växande (I) och begränsad (II)

så är ~~den~~ S_j konvergent.

(I) S_j växande. För detta behöver vi

$$0 \le S_{j+1} - S_j = f(j+1) \Rightarrow f(j) \ge 0.$$

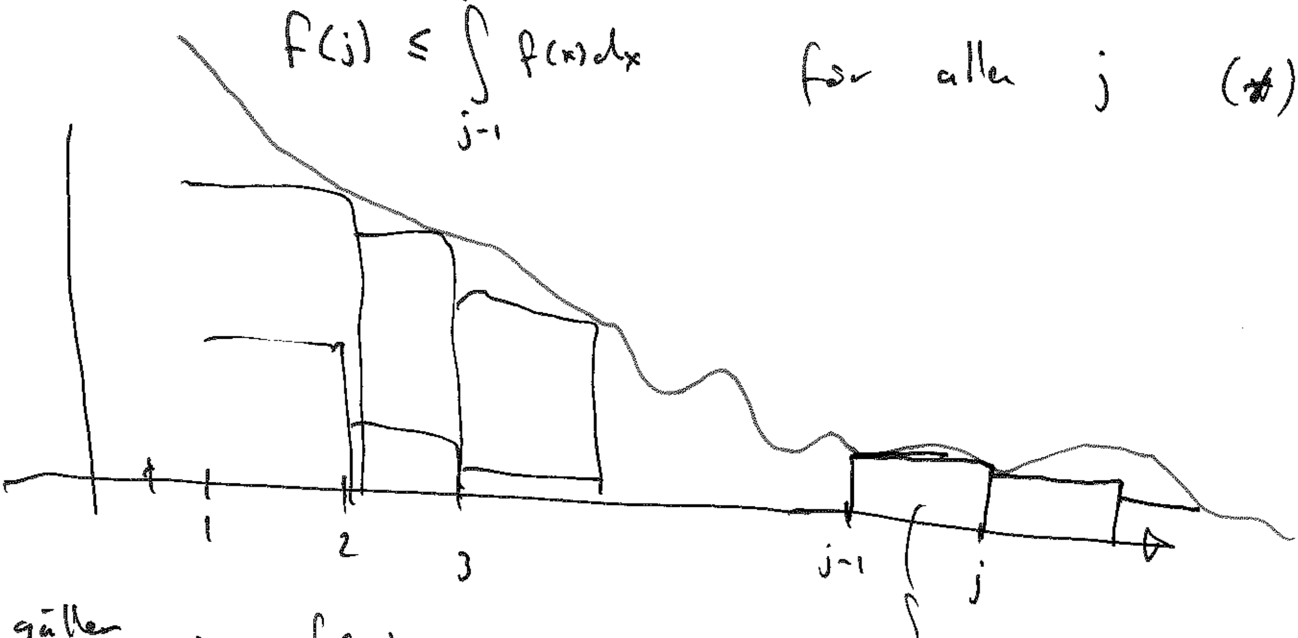
(II) S_j Begränsad. För detta vill vi använda

~~att~~ jämförelse principen

$$S_j \le f(1) + \int_1^j f(x)\,dx.$$

Det räcker att bevisa att

$$f(j) \le \int_{j-1}^{j} f(x)\,dx \qquad \text{för alla } j \qquad (*)$$



(*) gäller om $f(x)$ är avtagande.

Bevis: Vi definierar $S_j = \sum_{k=1}^{j} f(k)$, $S_j - S_{j-1} = f(j) \geq 0$
så S_j är växande.

Eftersom $f(x)$ är avtagande så kommer

$$\int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \geq \left\{ \begin{array}{l} k \geq x \text{ i integrationsintervallet} \\ \Rightarrow \quad f(x) \geq f(k) \end{array} \right\} \Rightarrow \geq$$

$$\geq \int_{k-1}^{k} f(k)\,dx = f(k).$$

Så

$$S_j = \sum_{k=1}^{j} f(k) = f(1) + \sum_{k=2}^{j} \underbrace{f(k)}_{\leq \int_{k-1}^{k} f(x)dx} \leq f(1) + \int_{1}^{j} f(x)dx \quad (1)$$

Om $\int_{1}^{\infty} f(x)dx$ konvergerar så ger (1) att

$$S_j \leq f(1) + \lim_{j\to\infty} \int_{1}^{j} f(x)dx = f(1) + \int_{1}^{\infty} f(x)dx.$$

Så S_j är växande och begränsad och därför konvergent.

Så $\int_{1}^{\infty} f(x)dx$ konvergerar $\Rightarrow$ $S_j = \sum_{k=1}^{j} f(k)$ konvergerar.