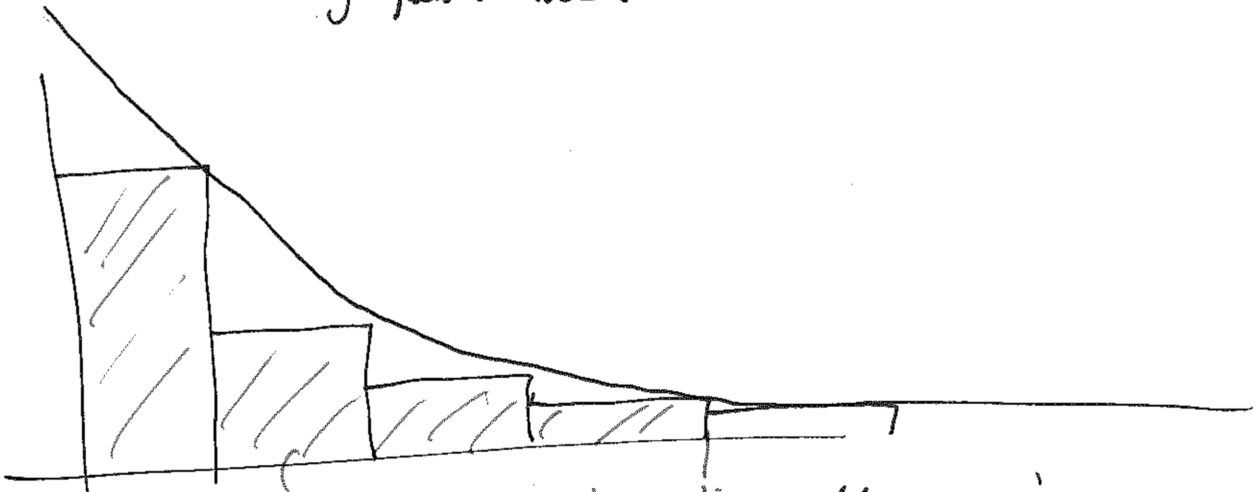
Föreläsning 22

Förra föreläsningen så visade vi att

$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1+j^2}$ var konvergent, dvs att

delsummorna $S_k = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{1+j^2}$ konvergerar.

Vi använde följande idé



k

ytan $S_k \leq \int_0^k \frac{1}{1+x^2}\,dx \leq \lim_{k\to\infty} \int_0^k \frac{1}{1+x^2}\,dx =$ (eftersom $\frac{1}{1+x^2} \geq 0$)

$= \lim_{k\to\infty} \arctan(k) = \frac{\pi}{2}$

Så $$\sum_{k=1}^{j} \frac{1}{1+k^2} = S_j \leq \int_0^j \frac{1}{1+x^2}\,dx \leq \lim_{j\to\infty} \int_0^j \frac{1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \lim_{j\to\infty} \arctan(j) = \pi/2 .$$

Så S_j är en växande (eftersom $\frac{1}{1+k^2} \geq 0$) och begränsad sekvens och kommer därför att konvergera till ett värde $\leq \frac{\pi}{2}$. (övre begränsningen).

Vi formaliserar detta som en sats.

<u>Sats</u>: [Cauchys integralkriterium.] Antag att

1) $f(x)$ är kontinuerlig på $[1, \infty[$
2) $f(x) \geq 0$
3) $f(x)$ är avtagande

Då kommer $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ att konvergera om och endast om $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ konvergerar.

Vad måste vi bevisa? Vad är idéen?

1) Vi vill använda satsen att

om $S_j = \sum_{k=1}^{j} f(k)$ $\underbrace{\text{är växande}}_{\mathrm{I}}$ och $\underbrace{\text{begränsad}}_{\mathrm{II}}$

så är S_j konvergent.

I S_j växande. För detta behöver vi

$$0 \leq S_{j+1} - S_j = f(j+1) \Rightarrow f(j) \geq 0.$$

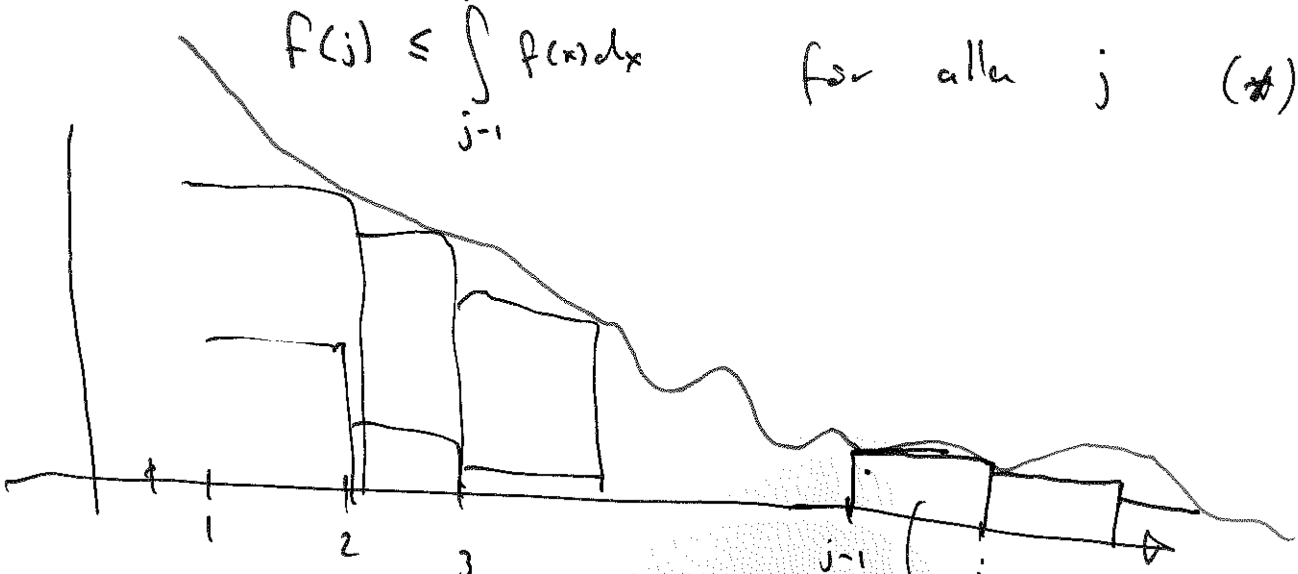
II S_j begränsad. För detta vill vi använda

jämförelse principen

$$S_j \leq f(1) + \int_1^j f(x)\,dx.$$

Det räcker att bevisa att

$$f(j) \leq \int_{j-1}^{j} f(x)\,dx \quad \text{för alla } j \quad (*)$$



(*) gäller om $f(x)$ är avtagande.

Bevis: Vi definierar $S_j = \sum_{k=1}^{j} f(k)$, $S_j - S_{j-1} = f(j) \geq 0$

så S_j är växande.

Eftersom $f(x)$ är avtagande så kommer

$$\int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \geq \left\{ \begin{array}{l} k \geq x \text{ i integrationsintervallet} \\ \Rightarrow f(x) \geq f(k) \end{array} \right\} \Rightarrow \geq$$

$$\geq \int_{k-1}^{k} f(k)\,dx = f(k).$$

Så

$$S_j = \sum_{k=1}^{j} f(k) = f(1) + \sum_{k=2}^{j} \underbrace{f(k)}_{\leq \int_{k-1}^{k} f(x)dx} \leq f(1) + \int_{1}^{j} f(x)dx \quad (1)$$

Om $\int_{1}^{\infty} f(x)dx$ konvergerar så ger (1) att

$$S_j \leq f(1) + \lim_{j \to \infty} \int_{1}^{j} f(x)dx = f(1) + \int_{1}^{\infty} f(x)dx.$$

Så S_j är växande och begränsad och därför konvergent.

Så $\int_{1}^{\infty} f(x)dx$ konvergerar $\Rightarrow$ $S_j = \sum_{k=1}^{j} f(k)$ konvergerar.

Följdsats Om $S_k \to S$, som i huvudsatsen

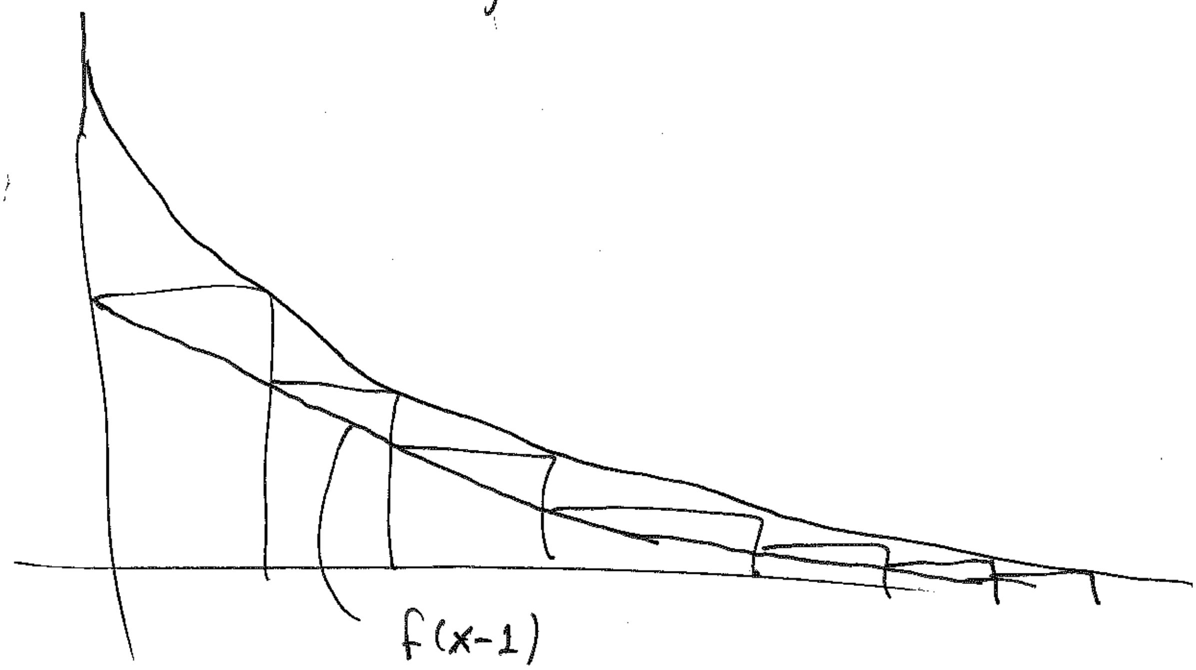
så kommer

$$|S - S_k| \le \int_k^\infty f(x)\,dx$$

Är ~~den~~ följdsatsen viktig?

Följdsats. $$\int_1^\infty f(x)\,dx \le \sum_{j=1}^\infty f(j) \le \int_0^\infty f(x)\,dx .$$

Är den viktig?



~~Exempel~~ **Följdsats**

$$\int_{k+1}^\infty f(x)\,dx \le |S - S_k| \le \int_k^\infty f(x)\,dx$$

Exempel 1. Beräkna $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(j+2)\ln(j+2)^2} = \sum_{j=1}^{\infty} f(j)$

med maximalt fel 10^{-2}

Svar: Enligt satsen så konvergerar integralen om $f(x)$ är avtagande, $f(x) \geq 0$ och $\int_0^{\infty} f(x)\,dx < \infty$

i) $f(x) \geq 0$ eftersom $(x+2) > 0$ och $\ln(x+2)^2 \geq 0$ då $x \geq 0$

ii)
$$f'(x) = -\frac{1}{(x+2)^2 \ln(x+2)^4}\Big(\underbrace{\ln(x+2)^2 + 2\ln(x+2)}_{\geq 0 \text{ då } x > -1}\Big) \leq 0$$

iii)
$$\int f(x)\,dx = -\frac{1}{\ln(x+2)} + C = F(x)$$

Så
$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\big[F(R) - F(0)\big] = \lim_{R\to\infty}\Big[\underbrace{-\frac{1}{\ln(R+2)}}_{\to 0} + \frac{1}{\ln(2)}\Big] = \frac{1}{\ln(2)} < \infty$$

så
$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(j+2)\ln(j+2)^2} \leq \frac{1}{\ln(2)},$$
och serien är konvergent enl. Cauchys integralkriterium.

Hur många termer ska vi addera för att få maximalt fel 10^{-2}? Om vi adderar k termer så blir felet

$$|S - S_k| \leq \int_k^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\Big[-\frac{1}{\ln(R+2)} + \frac{1}{\ln(k+2)}\Big] = \frac{1}{\ln(k+2)}$$

$$\frac{1}{\ln(k+2)} < \frac{1}{100} \Rightarrow 100 < \ln(k+2) \Rightarrow e^{100} - 2 < k.$$

Vi vet att $e^3 \approx 20$ så

$$e^{100} \approx (e^3)^{33} \approx (20)^{33} = 2^{33}\cdot 10^{33}$$

$2^{10} = 1024 \approx 10^3$ så

$$2^{33}\cdot 10^{33} \approx 2^3\cdot \underbrace{(2^{10})^3}_{(10^3)^3}\cdot 10^{33} \approx 8\cdot 10^{42} \approx 10^{43}$$

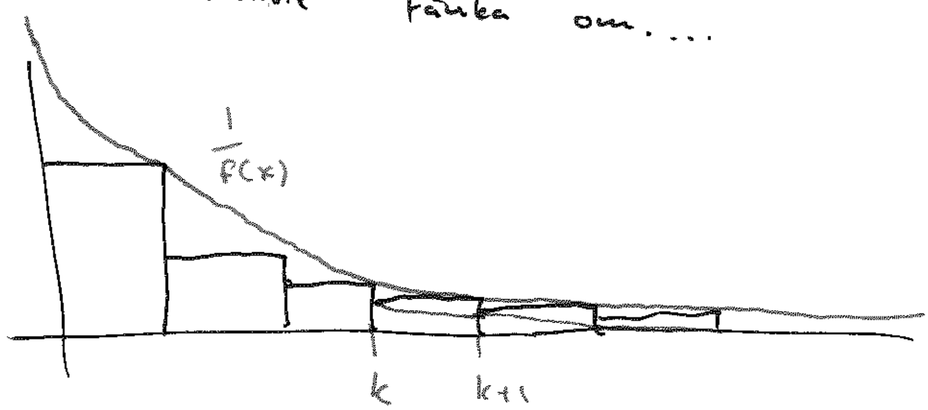
En snabb dator ~~beräknar~~ kan beräkna 10^{12} operationer/sek

så $k \approx 10^{43} \Rightarrow$ att det tar ca

$$\frac{10^{43}}{10^{12}} \text{ sek} \approx 10^{31} \text{ sek} \approx 10^{28} \text{ timmar} \approx 10^{26} \text{ dagar} \approx 10^{23} \text{ år}$$

att beräkna $\sum_{j=1}^{10^{43}} \frac{1}{(j+2)\ln(j+2)^2}$ med fel 10^{-2}.

Vi måste tänka om....



Så $\int_{k+1}^{\infty} f(x)\,dx \le S - S_k \le \int_{k}^{\infty} f(x)\,dx$ så

$$S - \left(S_k + \int_{k+1}^{\infty} f(x)\,dx\right) \le \int_{k}^{k+1} f(x)\,dx \le \int_{k}^{k+1} \frac{1}{\ln(k+2)^2(k+2)}\,dx = \cancel{\frac{1}{\ln(k+3)} - \frac{1}{\ln(k+2)}} =$$

$$= \frac{1}{\ln(k+2)^2(k+2)} \quad \text{och} \quad \frac{1}{\ln(k+2)^2(k+2)} < \frac{1}{100}$$

då $k = 18$ eftersom $e^{3} \approx 20$ så $\ln(20) \approx 3$

$\Rightarrow \dfrac{1}{(\ln(18+2))^2\,(20)} \approx \dfrac{1}{180} \leq \dfrac{1}{100}.$

Svar. $$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(j+2)\ln(j+2)^2} \approx \sum_{j=1}^{18} \frac{1}{(j+2)\ln(j+2)^2} + \underbrace{\int_{19}^{\infty} \frac{1}{(x+2)\ln(x+2)^2}dx}_{\frac{1}{\ln(21)}}$$

$$= \sum_{j=1}^{18} \frac{1}{(j+2)\ln(j+2)^2} + \frac{1}{\ln(21)}$$

med maximalt fel $\dfrac{1}{20(\ln(20))^2} \leq \dfrac{1}{100}$.