1) Tenta/KS anmälan

2) Teoriövning

Differential ekvationer

Exempel: En sten som släpps (hastighet noll) i tidpunkten $t=0$ kommer att börja accelerera så att dess hastighet $v(t)$ uppfyller $v'(t)=10$. Bestäm hastigheten.

Vi måste lösa:

Svar: $v'(t)=10$ (1)

$v(0)=0$ (2)

~~Den primitiva till~~ $v(t)$ är primitiv till 10

en! (1) så $v(t)=10t+C$.

(2) ger att $v(0)=C=0$ så

$v(t)=10t$.

Peace of cake!

Exempel 2: Antag att en sten släpps i vatten, $v(0)=0$ och v uppfyller

$$v'(t) = \cancel{10}\,8 \underbrace{- v(t)}_{\text{Motstånd i vattnet.}}.$$

Beräkna $v(0)$.

---

svar: $v'(t) + v(t) = 8$??

Vi kan inte bara integrera den här ekvationen för vi vet inte vad $v(t)$ är.

Vi måste vara smartare. Uppgiften innehåller derivator så vi måste använda det vi vet om derivator/primitiva funktioner.

Här är idéen. Om vi ville lösa

$$\cancel{G(t)v'(t)} \quad \underbrace{G(t)\,v'(t) + G'(t)\,v(t)}_{\text{~~kedjeregeln~~ produktregeln}} = 8 \qquad (3)$$

så

$$= \int \frac{d\left(G(t)\,v(t)\right)}{dt}\,dt = \int 8\,dt$$

$$\Longrightarrow \quad G(t)\,v(t) \cancel{+C} = \frac{\int 8\,dt - C}{G(t)}$$

Dvs. vi vill göra om vänsterledet till en derivata som vi kan integrera.

Så vi skriver om ekvationen

$$\underbrace{e^{*} v'(t) + e^{t} v(t)}_{= \frac{d e^{t} v(t)}{dt}} = 8 e^{t}$$

pga ~~kedjere~~ produkt regeln.

$$\int \frac{d e^{t} v(t)}{dt} dt = \int 8 e^{t} dt$$

$$e^{t} v(t) = 8 e^{t} + C$$

$$\Rightarrow \quad v(t) = 8 + C e^{-t}.$$

Eftersom $v(0) = 0$ så får vi

$$8 + C e^{0} = 8 + C = 0$$

så $C = -8$

$$v(t) = 8 - 8 e^{t}.$$

Integrerande faktor

SATS Betrakta differentialekvationen

$$y'(x) + g(x)\,y(x) = f(x) \qquad (4)$$

där f och g är kontinuerliga funktioner.

Vidare låt $G(x) = \int g(x)\,dx$.

Då kommer

$$y(t) = e^{-G(x)} \int \underbrace{e^{G(x)}}_{\cancel{\text{integrerande faktorn}}} f(x)\,dx \qquad (5)$$

att vara en lösning till (4).

Härledning av (5)

~~Bevis~~: Vi går sakvägen, egentligen så skulle det räcka att derivera (5) och verifiera att (5) löser (4). Men det är mer intressant att härleda (5) direkt.

Multiplicera (4) med $\underbrace{e^{G(x)}}_{\text{integrerande faktor.}}$ vilket ger

$$e^{G(x)}y'(x) + \underbrace{g(x)\,e^{G(x)}}_{\frac{d\,e^{G(x)}}{dx}}y(x) = e^{G(x)}f(x)$$

Produktregeln

$$\frac{d\,e^{G(x)}y(x)}{dx} = e^{G(x)}f(x)$$

integrera båda led

$$e^{G(x)}y(x) = \int e^{G(x)}f(x)\,dx \implies y(x) = e^{-G(x)}\int e^{G(x)}f(x)\,dx$$

Exempel. Lös

$$y'(x) + \sin(x)\, y(x) = \sin(x)$$

$$y(0) = 2.$$

Svar. Vi använder formeln

$$y(x) = e^{-G(x)} \int e^{G(x)} f(x)\, dx$$

där

$$G(x) = \int \sin(x)\, dx = -\cos(x) \; (+C)$$

$$f(x) = \sin(x).$$

vi behöver beräkna

$$\int e^{-\cos(x)} \underbrace{\sin(x)}_{\substack{\text{inre} \\ \text{derivatan} \\ \text{av } e^{-\cos(x)}}} dx = e^{-\cos(x)} + C$$

så

$$y(x) = e^{\cos(x)} \left(e^{-\cos(x)} + C \right) = 1 + Ce^{\cos(x)}.$$

Vi sätter in $x = 0$ och får

$$2 = y(0) = 1 + Ce^{\cos(0)} = 1 + Ce. \Rightarrow C = e^{-1}.$$

Svar! $\boxed{y(x) = 1 + e^{\cos(x) - 1}.}$

Definition. (lång och tråkig djävel)

En differential ekvation är en ekvation given i en relation mellan en (obekant) funktion och dess derivator.

Ordningen av en differential ekvation är det största antalet derivator som fås.

Exempel. $y'(x) + \sin(x)\,y(x) = \sin(x)$

är en första ordningens diff ekv. då vi bara tar en derivata.

Newtons formel

$$\underbrace{v''(x)}_{\text{acceleration}} = \underbrace{F}_{\text{kraft}}\,\underbrace{m}_{\text{massa}}$$

är en andra ordningens diff ekv.

En diff ekvation är linjär om den är på formen

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x)\, y^{(k)}(x) = f(x)$$

(dvs. ~~...~~ funktionen och dess derivator multipliceras aldrig med varandra, inga $\sin(y')$, e^y etc...)

Så vi har en formel

$$y(x) = e^{-G(x)} \int e^{G(x)} f(x)dx$$

för att lösa första ordningens linjära diff ekvationer

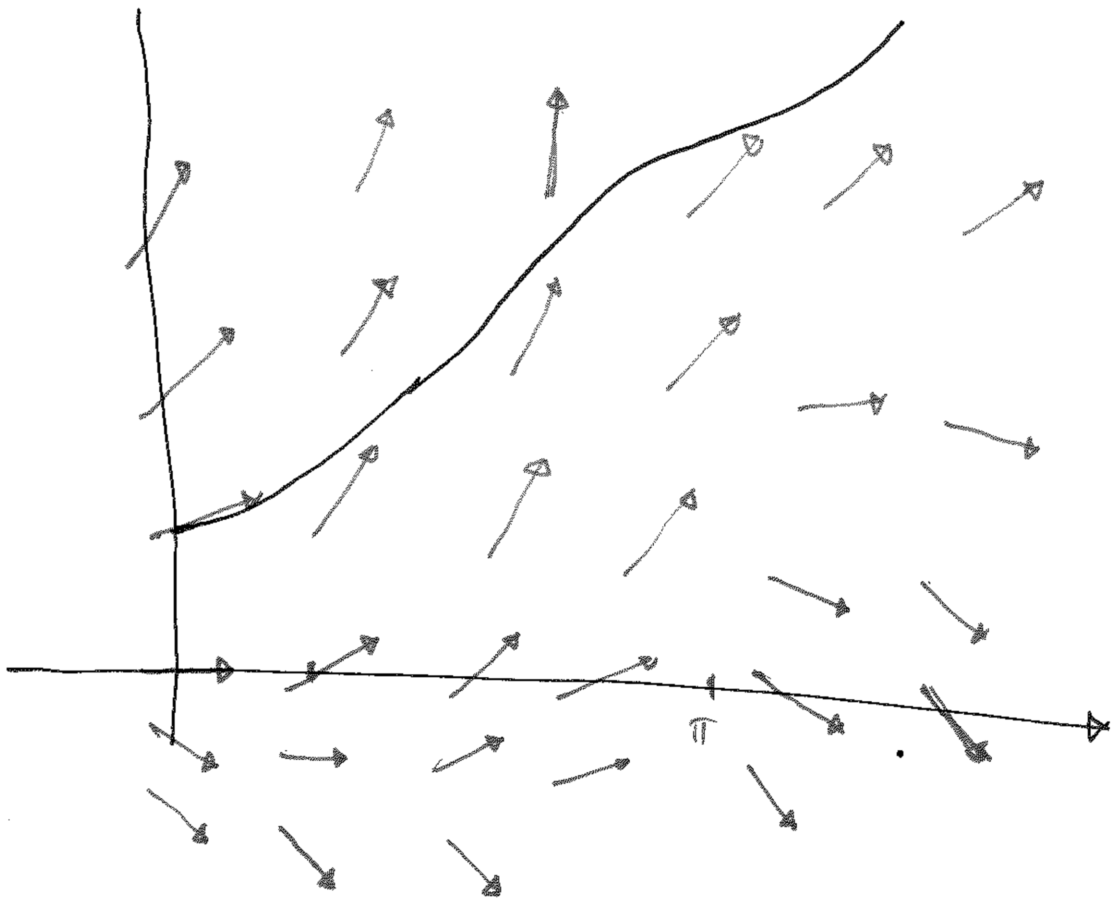
$$y'(x) + g(x)y(x) = f(x).$$

Men vad betyder detta geometriskt?

Låt oss betrakta en diff ekvation.

$$y'(x) = \frac{1}{3} y(x) + \sin(x). \qquad (6)$$

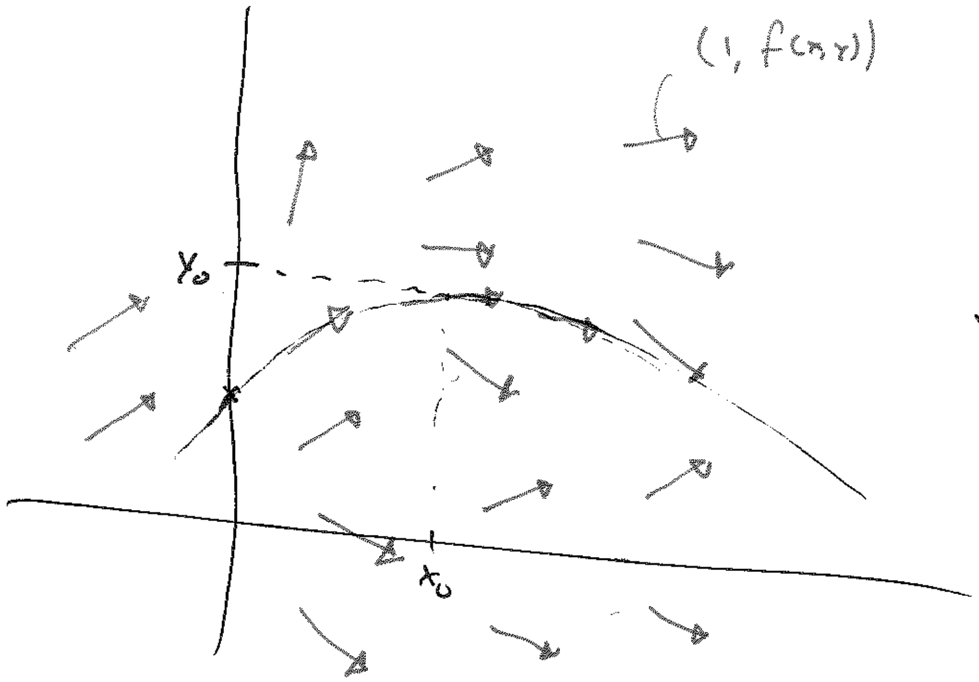
(6) säger att derivatan (låt oss säga tangenten) i punkten x ska vara $\frac{1}{3}y(x) + \sin(x)$



I allmänhet så kan man fråga sig givet ett vektorfält. Kan man hitta en funktion $\psi(x)$ så att

$$\psi'(x) = f(x,y)$$

$$y(x_0) = y_0$$



Kort frågor

1) En termostat ser till att temperaturen $y(x)$ i tidpunkten x förändras enligt $y'(x) = 20 - y(x)$.

i) Rita ett vektorfält.

ii) ~~Vilken temperatur ...~~
Vad är $\lim_{x \to \infty} y(x)$?

2) Skriv ner en diff ekvation vars lösning $y(x)$ uppfyller:

i) y växer då $x \leq -1$

ii) avtar då $y > 1$

iii) konstant i x då $y = \frac{1}{2}$.

$$\boxed{-(x+\tfrac{1}{2})(x-\tfrac{1}{2})(y+\tfrac{3}{4})}$$

Ett exempel på en icke linjär PDE.

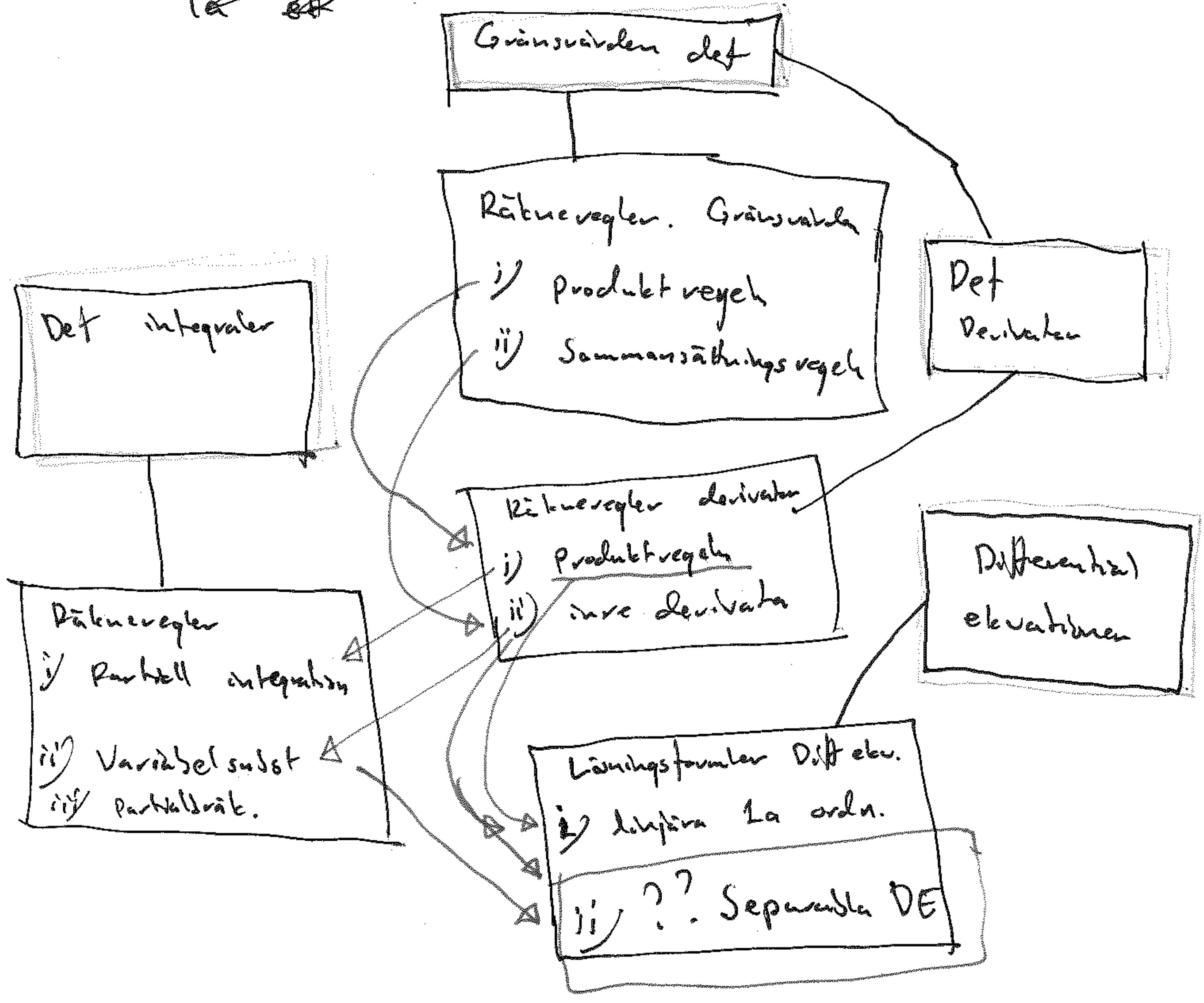
Exempel. Lös $y'(x) = xe^{x+y}$

$y(1) = 1$

Svar: Observera att den här diff ekvationen är inte linjär så vår lösningsformel ~~fungerar~~ är inte applicerbar.

Hur löser vi den här ekvationen.

~~Ta ett~~



Inre derivatan ~~def~~ ger oss att

$$\frac{dF(y(x))}{dx} = F'(y)\,y'(x)$$

$$F(y(x)) = \int F'(y)\,y'(x)\,dx$$

Så om vi kan skriva

$$y'(x) = xe^{x+y}$$

på formen

$$f(y)\,y'(x) = g(x)$$

Separabel, då vi kan separera alla y till en sidan.

så $F(y) = \int g(x)\,dx$ där $F(y) = \int f(y)\,dy$

$$\Rightarrow y(x) = F^{-1}\left(\int g(x)\,dx\right)$$ om f är

inverterbar.

Men

$$y'(x) = xe^{x+y} \Leftrightarrow e^{-y}\,y'(x) = xe^{x}$$

$$\Rightarrow -e^{-y(x)} = \int xe^{x}\,dx = \begin{Bmatrix}\text{part}\\ \text{int}\end{Bmatrix} =$$

$$= xe^{x} - e^{x} + c$$

så $e^{-y(x)} = -xe^{x} + e^{x} + c$.

~~så~~ $y(x) = -\ln\left(-xe^{x} + e^{x} - c\right)$

$c = -e$

så $y(x) = -\ln(-xe^{x} + e^{x} - e)$

$1 = y(1) = -\ln(-xe^{x} + e^{x} - c) \Rightarrow$ ~~e~~ $1 = -\ln(-c)$