F 24

Förra föreläsningen så sade vi att

$\underbrace{y'(x) + g(x)\, y(x) = f(x)}$ har lösningen $y(x) = e^{-G(x)} \int e^{G(x)} f(x) dx$

om f, g är kontinuerliga, $G(x) = \int g(x) dx$.

→ Linjär 1a ordningens diff ekv.

Vi började också att prata om

Exempel (Icke linjär Separabel diff ekv)

Lös $y'(x) = x e^{x+y}$ ①

$y(1) = 1$. ②

Svar: Vi resonerade oss fram till att vi borde kunna lösa icke linjära ekvationer som är separabla, dvs på formen

$$\frac{dF(y)}{dx} = \left\{ \begin{matrix} \text{kedje} \\ \text{regeln} \end{matrix} \right\} = \underbrace{f(y)\, y'(x)}_{\substack{\text{separerat} \\ y \text{ till VL}}} = \underbrace{g(x)}_{\substack{\text{separerat} \\ x \text{ till HL}}} \qquad \left[F(x) = \int f(x) dx \right]$$

Vi skriver därför ① som.

$$e^{-y}\, y'(x) = x e^{x} \qquad ③$$

Integrera båda led m.a.p. x

$$\int \cancel{x}\, e^{-y} y'(x)\,dx = \int x e^{x}\,dx \qquad (*)$$

$$\int e^{-y} y'(x)\,dx = \left\{\begin{array}{l}\text{variabel byte} \\ y(x)=y \\ y'(x)dx = dy\end{array}\right\} = \int e^{-y}\,dy = -e^{-y(x)} + C$$

$$\int x e^{x}\,dx = \int x \frac{de^{x}}{dx}\,dx = \left\{\begin{array}{l}\text{partiell} \\ \text{int}\end{array}\right\} = x e^{x} - \int \underbrace{\frac{dx}{dx}}_{1} e^{x}\,dx =$$

$$= x e^{x} - e^{x} + K.$$

Sätt in det i $(*)$ så får vi

$$+e^{-y(x)} = -x e^{x} + e^{x} + \cancel{(K-C)}\ C$$

$$+y(x) = -\ln(-x e^{x} + e^{x} + C).$$

För att bestämma C så sätter vi, enl. ekv. (2),

$$1 = y(1) = -\ln(\cancel{-1e^{1}} \cancel{+e^{1}} + C) = -\ln(C)$$

så $C = \frac{1}{e}$ $\Rightarrow$

$$\boxed{\text{Svar: } y(x) = -\ln\left(-x e^{x} + e^{x} + \frac{1}{e}\right).}$$

Sats: Antag att $f(y) > 0$ och $g(x)$ är kontinuerliga. Vidare så definierar vi

$$F(y) = \int f(y)\,dy \quad , \quad G(x) = \int g(x)\,dx.$$

Då är $y(x) = F^{-1}(G(x))$ deriverbar och löser den separabla diff. ekvationen.

$$f(y)\,y'(x) = g(x)$$

Bevis: Eftersom f, g är kontinuerliga så är F och G deriverbara (Def av primitiv ~~analysens huvudsats~~) och därför kontinuerliga (deriverbara funktioner är kontinuerliga.)

Vidare så ~~säger analysens huvudsats~~ enligt def av primitiv att

$$F'(y) = D\int f(y)\,dy = f(y) > 0$$

antagande

Vilket implicerar att F är strikt monoton. (Enligt medelvärdessatsen). Så F^{-1} är väldefinierad och kontinuerlig (sats 5 sid 509)

Det följer att F^{-1} är deriverbar och

$$DF^{-1} = \frac{1}{F'} = \frac{1}{f'} \quad . \text{(Sats 4 sid 199)}$$

Det innebär att $y(x)$ är deriverbar
(sammansättningen av två deriverbara funktioner är deriverbar)

Så

$$F(y(x)) = G(x).$$

Derivera båda led med avseende på x.

$$g(x) = \frac{d\,G(x)}{dx} = \frac{d\,F(y(x))}{dx} = \left\{ \begin{matrix} \text{kedje} \\ \text{regeln} \end{matrix} \right\} = F'(y(x))\,y'(x) = f(x)\,y'(x)$$

$\blacksquare$

Exempel (1a ordningens diff ekv.)

Lös

1) $$(x+2)(x-4)\,y' + 3x\,y(x) = 5$$

$$y(5) = 0$$

, ~~x~~ $x > 4$

2) $$y'(x) = 3x^2 y^2(x)$$

$$y(0) = c$$

skissa lösningskurvorna för olika c.

1) Detta är en linjär 1a ordningens diff ekv. så vi har en lösningsformel. Vi skriver diff ekv på standardformen

$$y' + \underbrace{\frac{3x}{(x+2)(x-4)}}_{g(x)}\, y = \underbrace{\frac{5}{(x+2)(x-4)}}_{f(x)}$$

Då är $y(x) = e^{-G(x)} \int e^{G(x)} f(x)\,dx$.

Vi börjar med att beräkna $G(x) = \int \frac{3x}{(x+2)(x-4)}\,dx$

för det så partialbråksuppdelar vi integranden

$$\frac{3x}{(x+2)(x-4)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-4} = \frac{(a+b)x - 4a + 2b}{(x+2)(x-4)}$$

Vi ser att

$$a + b = 3 \Longrightarrow \frac{3b}{2} = 3 \Longrightarrow b = 2$$

$$-4a + 2b = 0 \Longrightarrow a = \frac{b}{2} \Longrightarrow a = 1$$

så

$x > 4$ så $|x-4| = x-4$

$$G(x) = \int \frac{1}{x+2} + \frac{2}{x-4}\,dx = \ln(x+2) + \cancel{2}\ln(x-4)^2$$

Så

$$y(x) = e^{-\ln(x+2)(x-4)^2} \int \cancel{(x+2)}(x-4)^{\cancel{2}} \cdot \frac{5}{\cancel{(x+2)}\cancel{(x-4)}}\,dx = \frac{5\left(\frac{x^2}{2} - 4x + C\right)}{(x+2)(x-4)^2}$$

Så

$$y(5) = \frac{5\left(\frac{25}{2} - 20 + c\right)}{7} = \frac{5}{14}(-15 + 2c)$$

Så $c = \frac{15}{2}$

Svar: $y(x) = \dfrac{5\,(x^2 - 8x + 15)}{2\,(x+2)(x-4)^2}$.

---

2) Diff ekvationen är seperabel:

$$\underbrace{\frac{1}{y^2}}_{f} y' = \underbrace{3x^2}_{g}$$

Så vi integrerar $\int \frac{1}{y^2}\,dy = -\frac{1}{y} + C_1$

$$\int 3x^2\,dx = x^3 + C_2$$

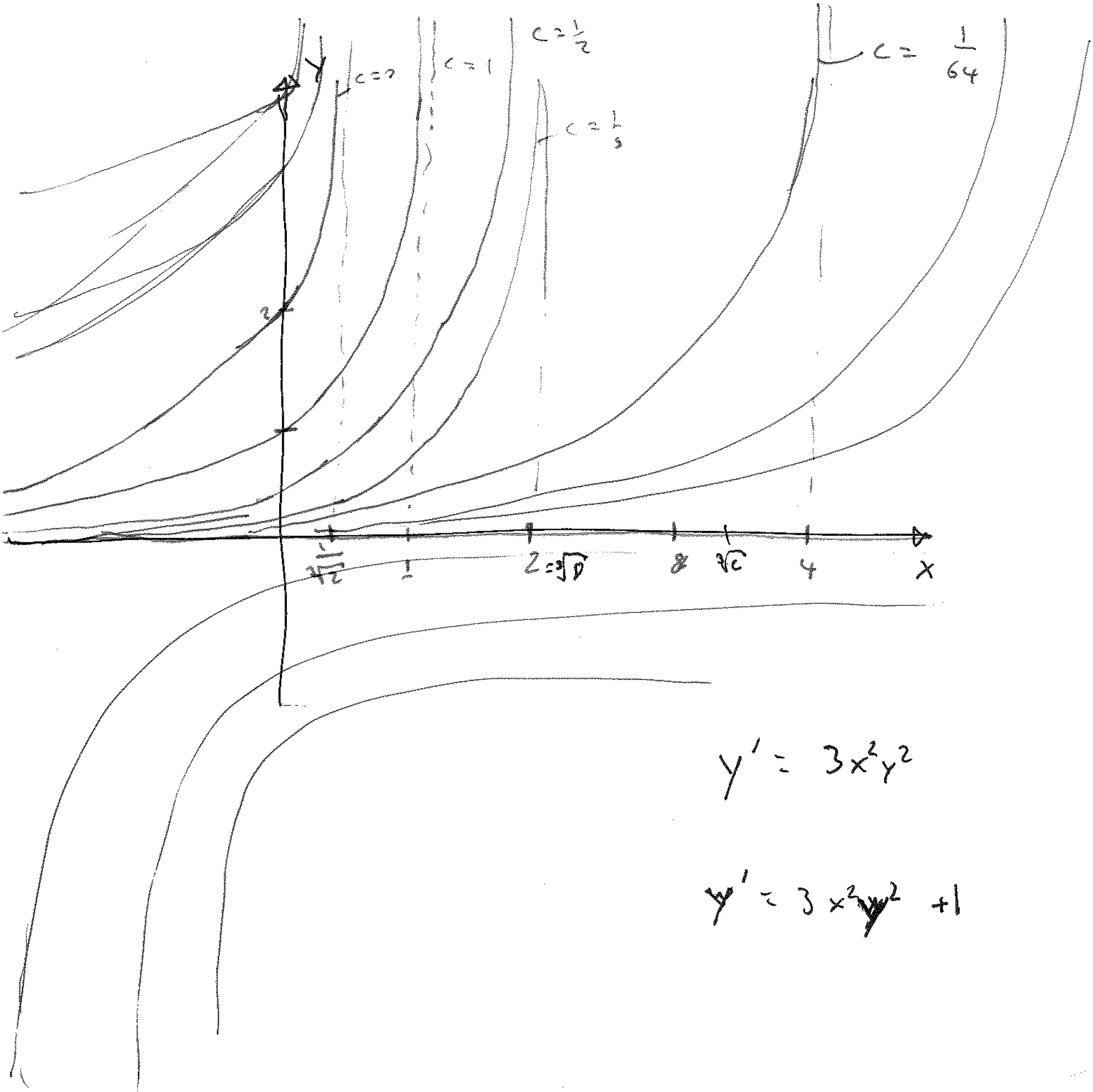
$$-\frac{1}{y} = x^3 + \underbrace{C_1 - C_2}_{k} \Rightarrow y = \frac{-1}{x^3 + k}$$

$y(0) = -\frac{1}{k} = c$ så $k = -\frac{1}{c}$ för $c \neq 0$

Vilket ger

$$y(x) = \frac{c}{1 - cx^3}, \quad \text{för } c \neq 0$$

Om $c = 0$ så ser vi att $y(x) = 0$ är en lösning



$$y' = 3x^2y^2$$

$$y' = 3x^2y^2 + 1$$

2a ordningens diff ekvationer - linjära med konstanta koefficienter

idag

Exempel: Lös $y''(x) + 4y'(x) + 5y(x) = \cancel{f(x)}$ 0

$y(0) = 0$

$y'(0) = 6$

Svar: Steg 1 Vi ska lösa det karakteristiska polynomet

$p(r) = r^2 + 4r - 5 = 0$

$\Rightarrow r = -2 \pm \sqrt{4+5} = \begin{cases} 1 \\ -5 \end{cases}$

Steg 2. Ansätt att

Homogena lösningen. $\left\{ ae^{1x} + be^{-5x} = y(x). \right.$

Verifiera

$$\frac{d^2(ae^x + be^{-5x})}{dx^2} + 4\frac{d(ae^x + be^{-5x})}{dx} - 5(ae^x + be^{-5x})$$

$$= ae^x + 25be^{-5x} + 4ae^x - 20be^{-5x} - 5ae^x - 5be^{-5x} =$$

$$= (1+4-5)ae^x + (25-20-5)be^{-5x} = 0.$$

Ok!

Steg 3 Välj a & b så att $y(0) = 0$
$y'(0) = 6$

$y(0) = a + b = 0 \Rightarrow a = -b$ $\Rightarrow a = 1$
$y'(0) = a - b5 = 6 \Rightarrow -6b = 6 \Rightarrow b = -1$

Svar: $y(x) = e^{x} - e^{-5x}$.

Strategi: $y''(x) + \alpha y'(x) + \beta y(x) = 0$

Steg 1. Hitta lösningarna till polynomet $r^2 + \alpha r + \beta = 0$

$$r = -\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \beta} = \begin{cases} r_1 \\ r_2 \end{cases}$$

Steg 2

I) Om $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $r_1 \neq r_2$, ansätt lösningen

$$y(x) = a e^{r_1 x} + b e^{r_2 x}$$

II) Om r_1, r_2 är komplexa så är de nödvändigtvis komplex konjugerade

$$r_1 = s + it, \quad r_2 = s - it$$ för två tal $s, t \in \mathbb{R}$

ansätt lösningen

$$y(x) = a e^{sx} \sin(tx) + b e^{sx} \cos(tx)$$

III) $r = r_1 = r_2 \in \mathbb{R}$. Ansätt lösningen $y(x) = a x e^{rx} + b e^{rx}$

Steg 3 Använd initial data $y(0)=?$
$y'(0)=?$

för att beräkna a och b.
Detta är vanlig linjär algebra

Exempel. Lös $y''(x)-2y'(x)+y(x)=0$
$y(0)=1 \qquad y'(0)=1$

Svar. Vi skriver det karakteristiska polynomet

$$p(r) \quad r^2-2r+1=0 \quad \Rightarrow \quad (r-1)^2=0$$

så $p(r)$ har en dubbelrot i $r=1$.

Vi ansätter därför lösningen (Fall 3)

$$y(x)=a\,xe^x+be^x$$

$$y(0)=1 \quad \Rightarrow \quad a\cdot 0e^0+be^0=1 \quad \Rightarrow \quad b=1$$

$$y'(0)=1 \quad \Rightarrow \quad ae^0+\underbrace{a\,0e^0}_{0}+\underbrace{be^0}_{1}=1 \quad \Rightarrow \quad a=0$$

Svar! $y(x)=e^x$.