Exempel

Lös
$$\left.\begin{aligned} &y''(x) - 2y'(x) + 5y(x) = \sin(x) \\ &y(0) = 0 \\ &y'(0) = 1. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Svar: Vi vet hur man löser

$$\left.\begin{aligned} &y'' - 2y' + 5y = 0 \\ &y(0) = u \\ &y'(0) = v \end{aligned}\right\} \text{ homogen ekvation.} \quad (2)$$

för vilka u och v som helst

Så om vi kan hitta en lösning

till $y'' - 2y' + 5y = \sin(x)$, (2)

Låt oss kalla lösningen till (3) för $y_p(x)$ partikulärlösningen, så borde vi kunna skriva lösningen till (1) som

$$y(x) = \underbrace{y_h(x)}_{\text{homogena lösningen}} + \underbrace{y_p(x)}_{\text{partikulär lösningen.}}$$

Dvs

$$y'' - 2y' + 5y = (y_h + y_p)'' - 2(y_h + y_p)' + 5(y_h + y_p) = \left\{\begin{matrix}\text{linjär} \\ \text{ekvation}\end{matrix}\right\}^2$$

$$= \underbrace{(y_h'' - 2y_h' + 5y_h)}_{=0} + \underbrace{(y_p'' - 2y_p' + 5y_p)}_{=\sin(x)} = \sin(x).$$

Och vi vet att y_h kommer att innehålla 2 godtyckliga konstanter som kan anpassas till randvillkoren

Hitta y_h.

Steg 1. Hitta rötterna till det karakteristiska polynomet $r^2-2r+5=0$.

$$r = 1 \pm \sqrt{1-5} = 1 \pm \sqrt{-4} = 1 \pm 2i$$

Steg 2 Vi har två komplex konjugerade rötter så vi ansätter att

$$y_h(x) = a e^x \cos(2x) + b e^x \sin(2x)$$

Innan vi bestämmer a och b så beräknar vi y_p. Vi vill att y_p skall uppfylla

$$y_p'' - 2y_p' + 5y_p = \sin(x). \quad (5)$$

Vi gissar att $y_p(x) = c \sin(x) + d \cos(x)$

för några $c, d \in \mathbb{R}$. Detta är rimligt eftersom när vi tar derivator av sin och cos så kommer vi att få nya sin/cos termer så med rätt val av c, d så borde vi kunna lösa (5).

$$y_p'' - 2y_p' + 5y_p =$$

$$-c\sin(x) - 2c\cos(x) + 5c\sin(x)$$

$$-d\cos(x) + 2d\sin(x) + 5d\cos(x) = \sin(x)$$

dvs
$$-4c + 2d = 1 \Rightarrow d = -\frac{1}{6}$$
$$-2c + 4d = 0 \Rightarrow c = 2d \Rightarrow c = -\frac{1}{3}$$

Så

$$y(x) = a e^x \cos(2x) + b e^x \sin(2x) - \frac{1}{6}\sin(x) - \frac{1}{3}\cos(x).$$

Så

$$0 = y(0) = a - \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{3}$$

$$1 = y'(0) = \frac{1}{3} \cancel{- \frac{2}{3} e^0 \sin(0)} + \cancel{b e^0 \sin(0)}$$

$$+ 2b - \frac{1}{6} \cancel{+ \frac{1}{3}\sin(0)}$$

$$\Rightarrow \quad b = \frac{5}{12}.$$

Svar: $y(x) = \frac{1}{3} e^x \cos(2x) + \frac{5}{12} e^x \sin(2x) - \frac{1}{6}\sin(x) - \frac{1}{3}\cos(x)$

Så för att lösa $y''(x) + ay' + by(x) = f(x)$

så använder vi strategin.

1) Skriv $y = y_h + y_p$ där

y_h är den homogena lösningen

$$y_h'' + ay_h' + by_h = 0$$

vilken vi såg hur man löste förra veckan:

i) hitta $\underbrace{\text{rötterna}}_{r_1, r_2}$ till $r^2 + ar + b = 0$

ii) $r_1 \neq r_2$ och $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$

så ansätt $y_h = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$

r_1 och r_2 komplexa $s \pm it$ $r_{1,2}$

så ansätt

$$y_h = \alpha e^{sx} \cos(tx) + \beta e^{sx} \sin(tx)$$

$r_1 = r_2$ så ansätt

$$y_h = \alpha x e^{r_1 x} + \beta e^{r_1 x}.$$

2) ~~Lös~~ hitta en partikulärlösning

$$y_p'' + ay_p' + by_p = f(x).$$

3) Välj konstanten så att $y_h(0) + y_p(0) = \_\_$

$y_h'(0) + y_p'(0) = \_\_$

Vi gissar y_p (ansätter)

så ansätter vi	$f(x)$
$y_p = \frac{c}{b}$ $b \neq 0$ $y_p = \frac{c}{a}x$ $b = 0,\ a \neq 0$ $y_p = \frac{c}{2}x^2$ $a = b = 0$	$= c$ en konstant
y_p = polynom av samma grad $b \neq 0$ y_p = polynom av grad 1 högre om $b = 0$ $a \neq 0$ y_p = ______	f = polynom
y_p = polynom $\times\ e^{\alpha x}$	f = polynom $\cdot\ e^{\alpha x}$
y_p = polynom $\sin(\beta x)e^{\alpha x}$ + + polynom $\cos(\beta x)e^{\alpha x}$	f = polynom $\sin(\beta x)e^{\alpha x}$ eller f = polynom $\cos(\beta x)e^{\alpha x}$

Ett väldigt specialfall

Om $f(x)$ är en lösning till den homogena ekvationen så ansätt att

$$y_p = \text{polynom} \cdot f(x).$$

Exempel

1) Vad ansätter vi för lösning till

$$y_p'' + 3y_p' + y_p = x\cos(2x) \quad ?$$

Svar: $a\,x\cos(2x) + b\cos(2x)$

$+ c\,x\sin(2x) + d\sin(2x)$

2) $$y_p'' - 2y_p' + 743\,y_p = 411\,e^x$$

Svar: $a\,e^x$

3) $$y_p'' + y_p' = x^2 + 4$$

Svar $ax^3 + bx^2 + cx.$

etc.
etc..

Definition: We define $C^k([a,b])$ to be the set of all funktions f definierade på $[a,b]$ så att f är k gånger kontinuerligt deriverbar på $[a,b]$. ($C^0([a,b]) = C([a,b])$ är de kontinuerliga funktionerna)

Observera att $C^k([a,b])$ är ett linjärt vektorrum. ~~a~~. $f, g \in C^k([a,b])$ så kommer $af + bg \in C^k([a,b])$, precis som i ~~lin~~ linjär algebra!

Vidare så kan vi betrakta D som en linjär avbildning

$$D : C^k([a,b]) \longrightarrow C^{k-1}([a,b])$$

$$f(x) \longrightarrow f'(x)$$

På samma sätt som i linjär algebra.

$$D(af(x) + bg(x)) = a\,Df(x) + b\,Dg(x).$$

Vad är ett egenvärde till D?

~~Ex~~ Kom ihåg att λ är ett egenvärde om det finns ett $f(x)$ så att

$$Df(x) = \lambda f(x)$$

(precis som i lin alg
$Mx = \lambda x$)

Vi kan skriva detta som en diff ekvation

$$f'(x) - \lambda f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad ce^{\lambda x} = f(x)$$

Så derivering "D" har alla tal $\lambda \in \mathbb{R}$ som egenvärden !!

Vidare så kan vi se att diff ekvationen

$$\mathcal{L}\, y(x) = y''(x) + a y'(x) + b y(x)$$

är en linjär avbildning från $C^2(\mathbb{R}) \longrightarrow C(\mathbb{R})$.

$$\mathcal{L} = "D^2 + aD + b".$$

Observera att om λ_1 och λ_2 är lösningar till det karakteristiska polynomet $r^2 + ar + b$

så $(r - \lambda_1)(r - \lambda_2) = r^2 + ar + b$

och därför

$$(D-\lambda_2)(D-\lambda_1) = (D - \lambda_1)(D - \lambda_2) = D^2 + aD + b = \mathcal{L}.$$

Så om $f = e^{\lambda_1 x}$ så

$$\mathcal{L} f(x) = (D - \lambda_2)\underbrace{\Big[(D - \lambda_1) f(x)\Big]}_{=0}$$

ligger i nollrummet.

och om $f = e^{\lambda_2 x}$ så

$$\mathcal{L} f = (D-\lambda_1)\underbrace{\Big[(D-\lambda_2) f\Big]}_{=0} = 0$$

~~Så~~ Och eftersom $\mathcal{L}$ är linjär så kommer

$$\mathcal{L}\left(a e^{\lambda_1 x} + b e^{\lambda_2 x}\right) = a \underbrace{\mathcal{L} e^{\lambda_1 x}}_{=0} + b \underbrace{\mathcal{L} e^{\lambda_2 x}}_{=0} = 0.$$

Exempel: Lös $\left(D^2 - 2D + 1\right) y(x) = 0$

Svar: $\left(D^2 - 2D + 1\right) = \left(D - 1\right)^2$

~~Så~~ Eftersom $\left(D - 1\right) e^x = 0$ så

ligger e^x i nollrummet för $\mathcal{L}$.

Vidare så ~~ligger~~ ~~y~~ ~~är y(x)~~

$\mathcal{L}\, y(x) = 0$ om $(D-1)\underbrace{\left(Dy - y\right)}_{y'-y} = 0$

Dvs om ~~0~~ $y' - y$ ligger i nollrummet till $D - 1$, dvs om $y'(x) - y(x) = a e^x$ för något a. Vi löser detta m.h.a. den integrerande faktorn e^{-x}

$$D\left(e^{-x} y(x)\right) = a$$

$$\Rightarrow e^{-x} y(x) = ax + b \Rightarrow y(x) = (ax+b)e^x.$$

Sats: ~~Låt~~ Antag att
$$y'(x) - \alpha y(x) = 0$$
$$y(0) = 0$$
då är $y(x) = 0$.

Varför är satsen viktig?.

Följdsats: Ekvationen
$$y'(x) - \alpha y(x) = 0$$
$$y(0) = a$$
har en unik lösning $y(x) = a e^{\alpha x}$.

Bevis Om det finns en annan lösning $z(x)$ så skulle $g(x) = y(x) - z(x)$ uppfylla

$$g'(x) - \alpha g(x) = \underbrace{y'(x) - \alpha y(x)}_{=0} - \underbrace{\left(z'(x) - \alpha z(x)\right)}_{=0} = 0$$

och $g(0) = y(0) - z(0) = a - a = 0$.

Så $g(x) = 0 \implies y(x) = z(x)$.

Bevis

Steg 1: Skriv om ekvationen så att $\alpha \geq 0$.

Betrakta $e^{-\alpha x} y(x) = z(x)$.

Då $\dfrac{dz(x)}{dx} = e^{-\alpha x} y'(x) - \alpha e^{-\alpha x} y(x) =$

$$= e^{-\alpha x} \left(y'(x) - \alpha y(x) \right) = 0$$

och $z(0) = e^{-\alpha \cdot 0} y(0) = 0.$

Steg 2 $z(x) = 0$.

Eftersom $z'(x) = 0$ så är $z(x)$ konstant

$\Rightarrow \quad z(x) = z(0) = 0.$

Steg 3 $\quad y(x) = e^{\alpha x} z(x) = 0.$

1 <u>Kort fråga:</u> Ta 5 minuter och diskutera hur man löser

$$y'''(x) - 2y''(x) - y(x) + 2 = \sin(3x)$$

$$y(0) = 0$$

$$y'(0) = 1$$

Behövs det något mer?

<u>Kort fråga:</u>

Hitta a & b så att alla lösningar till

$$y^{4}(x) + a\,y'(x) + by(x) = 0$$

uppfyller

$$\lim_{x \to \infty} y(x) = 0.$$