Taylors Sats. Antag att $f(x)$ är kontinuerligt deriverbar n gånger på $[a,b]$ och att $x_0 \in [a,b]$.

Då kommer,

$$f(x) = f(x^0) + f'(x^0)(x-x^0) + \frac{f''(x^0)}{2}(x-x^0)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{R(\theta x)}{n!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{R(\theta x)}{n!}(x-x_0)^n$$

där $\boxed{R(\theta x) = f^{(n)}(\theta x)}$ för något $x_1 \in [x_0, x]$.

Vad är det som gör satsen viktig?

Det är det att vi kan säga att

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-x_0)^k \right| = \left| \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!}(x-x_0)^n \right| \leq \frac{\sup_{|y|<x} |f^{(n)}(y)|}{n!}(x-x_0)^n$$

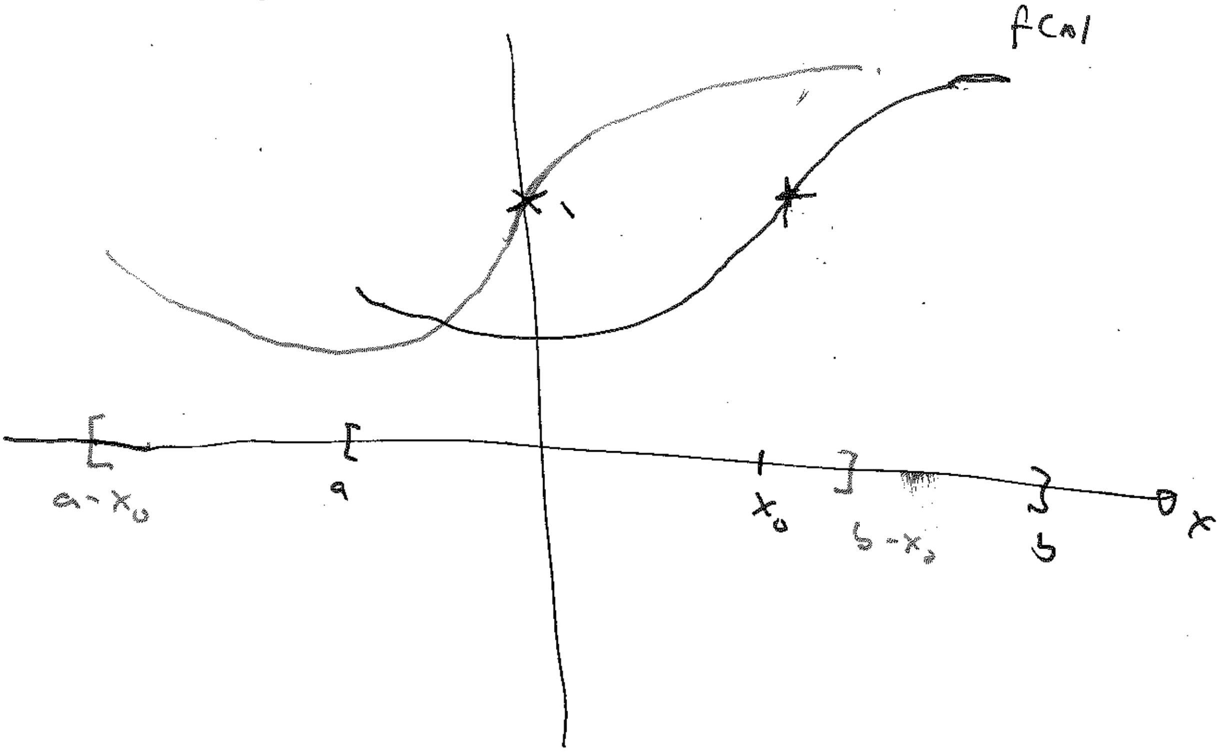
Så vi kan uppskatta hur stort fel vi får i approximationen!

Bevis:

Steg 1: Vi kan reducera till fallet $x_0 = 0$.

Vi gör detta genom att definiera

$$g(x) = f(x + x_0)$$



Steg 2 Vi ska alltså visa att

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!} x^n$$

för något $x_1 \in [0, x]$.

Vi definierar M så att

$$Mx^n = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + f(x), \quad \text{dvs}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + Mx^n = f(x). \qquad (1)$$

Om vi kan visa att $\frac{f^{(n)}(x_1)}{n!} = M$

för något $x_1 \in [0, x]$ så är vi klara.

Vi börjar med två enkla fall.

Fall 1: Om $n=1$.

Då säger (1) att

$$f(0) + Mx = f(x) \Longrightarrow \quad Mx = (f(x) - f(0)) =$$

$$= \{ \text{~~satsen~~ medelvärdessatsen} \} = M\cancel{x} = f'(x_1)\cancel{(x-0)}$$

Så det gäller i fallet då $n=1$.

[Så Taylors sats är en generalisering av ~~Medelv~~ Medelvärdessatsen]

Fall 2: Om $n=2$.

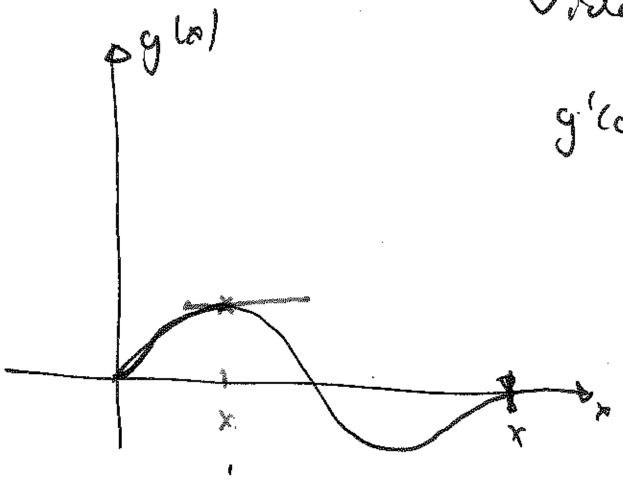
Då säger (1) att

$$f(0) + f'(0)x + Mx^2 = f(x) \qquad \Longrightarrow$$

$$0 \; \cancel{Mx^2} = f(x) - f(0) - f'(0)x - Mx^2 = g(x)$$

Då är $g(0)=0$ och $g(x)=0$

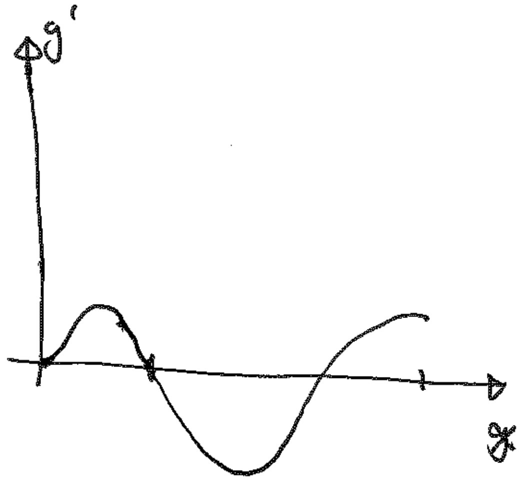
Vidare så är



$$g'(0) = f'(0) - f'(0) - 2M0 = 0.$$

Eftersom $g(0)=0$ och $g(x)=0$ så finns det ett $x_1 \in [0, x]$

så att $g'(x_2)=0$. Så $g'(0) = g'(x_2) = 0$



så det finns ett $x_1 \in [0, x_2]$ så att $g''(x_1)=0$

Men

$$g''(x_1) = f''(x_1) + 0 + 0 + 2M \Rightarrow M = \frac{f''(x_1)}{2}.$$

så

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + Mx^2 = f(0) + f'(0) + \frac{f''(x_1)}{2}x^2$$

där $x_1 \in [0, x_2] \subset [0, x]$.

Fall 3 För allmänt n.

Observera att

$$g(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k - M x^n$$

uppfyller

$$g(0) = 0, \quad g'(0) = g''(0) = \dots = g^{n-1}(0) = 0$$

och $g(x) = 0$.

Då $g(0) = g(x) = 0$ så finns det ett x_{n-1} så att $g'(x_{n-1}) = 0$.

Så $g'(x_{n-1}) = g'(0) = 0 \Rightarrow \exists x_{n-2} \in [0, x_{n-1}]$ så att $g''(x_{n-2}) = 0 \Rightarrow \exists x_{n-3} \in \{0, x_{n-2}\}$ så att $g^{(3)}(x_{n-3}) = 0 \Rightarrow \dots$

$g^{(n)}(x_1) = 0$. Men

$$0 = g^{(n)}(x_1) = f^{(n)}(x_1) - n!\,M \Rightarrow M = \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!}$$

så

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + M x^n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!} x^n$$

där $x_1 \in [0, x_2] \subset [0, x_3] \subset \dots \subset [0, x]$.

Exempel: Beräkna $f(\frac{1}{10})$ då när $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{5}}$ med maximalt fel på 10^{-3}.

Svar: Vi skriver $f(\frac{1}{10}) = P_{n-1}(\frac{1}{10}) + \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!} \frac{1}{10^n}$

Där $P_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$.

För att få felet mindre än 10^{-3}

så måste $\frac{f^{(n)}(x_1)}{n!} \frac{1}{10^n} < 10^{-3}$.

$f'(x) = \frac{1}{5}(1+x)^{-\frac{4}{5}}$, $f''(x) \leq -\frac{4}{5^2}(1+x)^{-\frac{9}{5}}$

så vi ser att $|f''(x_1)| \leqslant \frac{4}{5^2} \frac{1}{|1+x_1|^{9/5}} \leqslant \frac{4}{5^2}$

då $x_1 \in [0, \frac{1}{10}]$.

Därför så är $\left| \frac{f''(x_1)}{2!} \frac{1}{10^2} \right| \leqslant \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{10^3} < \frac{1}{10^3}$

Så

$$\left| f(\tfrac{1}{10}) - P_1(\tfrac{1}{10}) \right| < \frac{1}{10^3}.$$

$P_1(x) = f(0) + f'(0)x = 1 + \frac{x}{5}$.

Så $f(\frac{1}{10}) \approx 1 + \frac{1}{50}$ med maximalt fel 10^{-3}.

Exempel: Approximera $f(x) = e^{x^3} \arctan(x^2)$ med ett polynom så att polynomet skiljer sig från $f(x)$ med maximalt $\frac{1}{100}$ på $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Svar: Man blir lite sugen på att direkt börja göra beräkningar. Men om vi börjar derivera $f(x)$ så kommer vi direkt att få massa inre derivator och produktregler. Det kommer att bli väldigt svårt att beräkna mer än den första derivatan. Vi måste vara smartare.

Idé.

Steg 1 Om $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ så ligger $x^3 \in [-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}]$ så om vi kan approximera, med $y = x^3$

$$e^y = p(y) + R(y) \quad \text{för } y \in [-\tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{8}], \quad y = x^3$$

$$\arctan(z) = q(z) + S(z) \quad \text{för } z \in [0, \tfrac{1}{4}], \quad z = x^2$$

Så kommer

$$|f(x) - p(x^3)q(x^2)| = |(p(x^3) + R(x^3))(q(x^2) + S(x^2)) - p(x^3)q(x^2)| =$$

$$= |q(x^2)R(x^3) + p(x^3)S(x^2) + S(x^2)R(x^3)| \leq$$

$$\leq |q(x^2)||R(x^3)| + |p(x^3)||S(x^2)| + |S(x^2)||R(x^3)| \leq$$

$$\leq |\arctan(x^2) - S(x^2)||R(x^3)| + |e^{x^3} - R(x^3)||S(x^2)| + |S(x^2)||R(x^3)| \leq$$

$$\leq \underbrace{|\arctan(x^2)|}_{\leq \pi/2}|R(x^3)| + 3|S(x^2)||R(x^3)| + \underbrace{|e^{x^3}|}_{\leq e^{1/8} \leq \sqrt{e} < 2}|S(x^2)| \leq \frac{\pi}{2}|R(x^3)| + 2|S(x^2)| + 3|S(x^2)||R(x^3)|$$

$$\leq 4|R(x^3)| + 2|S(x^2)| + 3|S(x^2)||R(x^3)|$$

Så om $|R(y)| < \frac{1}{1000}$ då $|y| \leq \frac{1}{8}$

$|S(z)| < \frac{1}{500}$ då $|z| \leq \frac{1}{4}$

så kommer

$$|f(x) - R(x^3)S(x^2)| \leq 4 \cdot \frac{1}{1000} + 2 \cdot \frac{1}{500} + 3 \frac{1}{500} \cdot \frac{1}{1000} \leq$$

$$\leq \frac{1}{250} + \frac{1}{250} + \frac{1}{10^5} < \frac{1}{100} .$$

Nu beräknar vi

$$e^y = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cancel{f^{(k)}(0)}\,1}{k!} y^k + \underbrace{\frac{e^{\theta y}}{n!} y^n}_{|\quad| < \frac{1}{1000}} \quad \text{då} \quad |y| \leq \frac{1}{8}$$

$|e^y| \leq 2$ då $|y| < \frac{1}{8}$ och

$$\frac{|e^y|}{3!}\left(\frac{1}{8}\right)^3 \leq \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{2^9} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{512} < \frac{1}{1500}.$$ Så $n = 3$ räcker

$$p(y) = 1 + y + \frac{y^2}{2} \implies p(x^3) = 1 + x^3 + \frac{x^6}{2} .$$

$$\frac{d\arctan z)}{dz} = \frac{1}{1+z^2} \Rightarrow \left.\frac{d\arctan(z)}{dz}\right|_{z=0} = 1$$

$$\frac{d^2\arctan(z)}{dz^2} = -\frac{2}{(1+z^2)^2}\cdot 2z = -\frac{4z}{(1+z^2)^2} \Rightarrow \left.\frac{d^2\arctan z}{dz^2}\right|_{z=0} = 0$$

$$\frac{d^3\arctan(z)}{dz^3} = -\frac{4}{(1+z^2)^2} + \frac{\cancel{18}\, z^2}{(1+z^2)^3} \Rightarrow \frac{d^3\arctan(z)}{dz^3} = -4$$

$$= \frac{-4 - 12z^2}{(1+z^2)^3}$$

$$\frac{d^4\arctan(z)}{dz^4} = \frac{-24z}{(1+z)^3} + \frac{24z + 72z^3}{(1+z^2)^4} \Rightarrow \frac{d^4 \text{ar}}{d}$$

$$= \frac{-24z - 24z^3 + 24z + 72z^3}{(1+z^2)^4} = \frac{48z^3}{(1+z^2)^4}$$

Så $\left|\frac{d^4\arctan(z)}{dz^4}\right| \leq 48|z^3| \leq \frac{48}{4^3} = \frac{48}{64} = \frac{3}{4}$

så

$$\arctan(z) = 0 + z - \frac{4z^3}{3!} + R(z)$$

där $|R(z)| \leq \frac{3}{4}\frac{1}{4!}\cdot z^4 \leq \frac{1}{4\cdot 8}\cdot\frac{1}{4^4} \leq \frac{1}{2^{13}} \leq \frac{1}{8000}.$

Så $q(z) = z - \frac{2}{3} z^2 \Rightarrow q(x^2) = x^2 - \frac{2}{3} x^4$

fungerar.

Så

$$e^{x^3} \arctan(x^2) \approx p(x^3)\, q(x^2) = \left(1 + x^3 + \frac{x^6}{2}\right)\left(x^2 - \frac{2}{3} x^4\right)$$

$$= x^2 - \frac{2}{3} x^4 + x^5 - \frac{2}{3} x^7 + \frac{x^8}{2} - \frac{1}{3} x^{10}$$

$\approx$ med maximalt fel 10^{-2}.