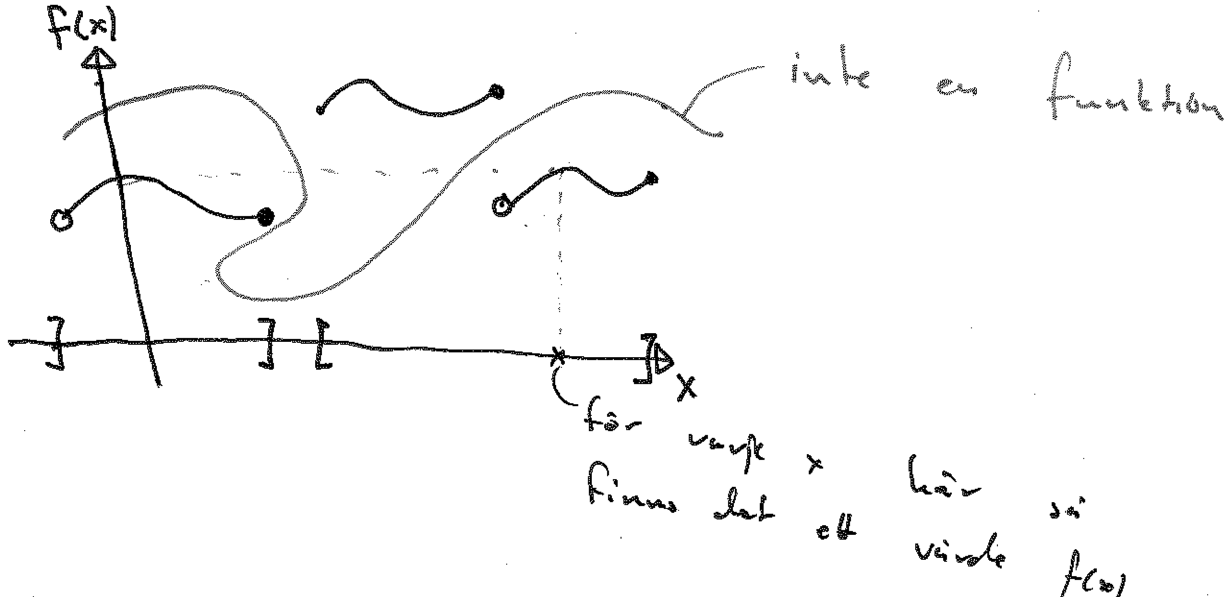
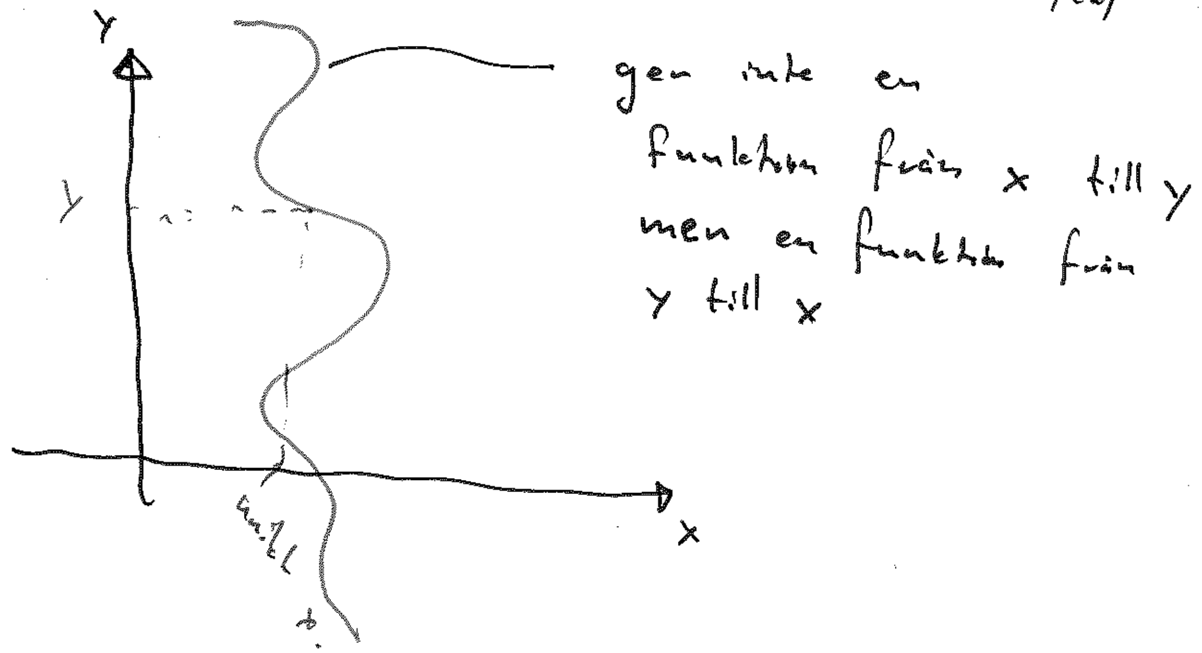
Förra veckan så definierade vi funktionen

> Def: En funktion f från en mängd M till en mängd N är en regel som på ett entydigt sätt tilldelar varje objekt i M ett objekt i N.

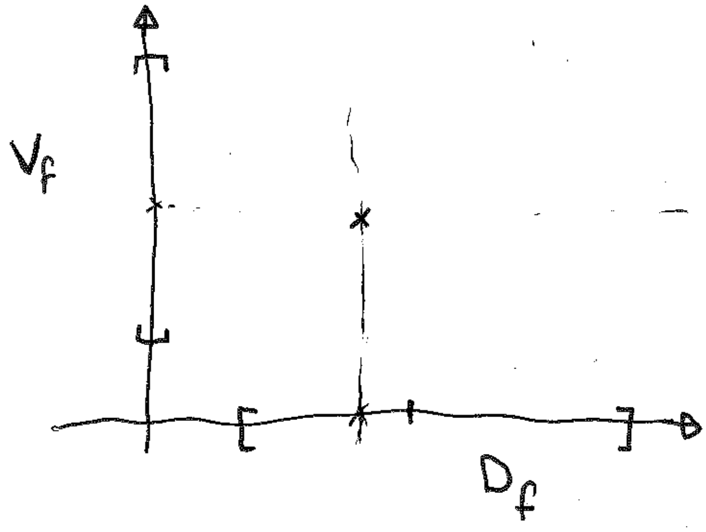
Typiskt så kommer M, N att vara en del av de reella talen. ~~att~~





Inverser:

Vilka funktioner från ~~f~~ x till y definierar också funktioner ~~f~~ från y till x?



Def: Vi säger att $f(x)$ är injektiv om $f(x) = f(y)$ implicerar att $x = y$.

Vi säger att f är surjektiv om det för varje $y \in N$ existerar ett $x \in M$ så att $f(x) = y$.

Vi säger att f är ~~[illegible]~~ bijektiv om f är injektiv och surjektiv.

Exempel: Varje funktion är surjektiv ~~på ett~~ ~~vinden~~ från ~~så att~~ D_f till

$$V_f \doteq \{y \in N;\ \exists x \in D_f \text{ så att } f(x) = y\}.$$

Inverser.

~~Vi säger~~
Om $f(x)$ är en funktion så säger vi att $g(y) = (f^{-1}(y))$ är en invers till $f(x)$ om det för varje $x \in D_f$ gäller att

$$f^{-1}(f(x)) = x.$$

Fråga: Har varje funktion en invers.

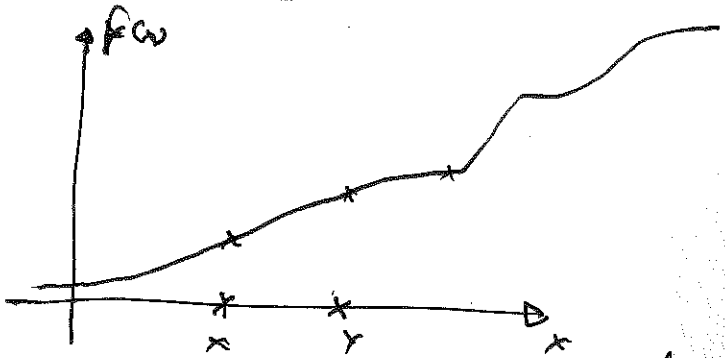
Sats: Om $f(x)$ är injektiv så har $f(x)$ en invers f^{-1} från V_f till D_f.
Vidare $D_{f^{-1}} = V_f$ och $V_{f^{-1}} = D_f$

Hur kollar man om f har en invers?

Def: Vi säger att $f(x)$ från $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är växande (avtagande) om

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y) \qquad (f(x) \geq f(y))$$

Vi säger att $f(x)$ är strikt växande (avtagande) om strikt olikhet gäller.



Vi använder strukturen av $\mathbb{R}$ för att definiera något nytt

Sats: Om $f(x)$ är strikt växande från $D_f \subset \mathbb{R}$ till $V_f \subset \mathbb{R}$ då har $f(x)$ en invers.

Bevis: Det räcker att visa att f är injektiv enl. föregående sats.

Vi använder ett motsägelse argument.

Antag att $\underbrace{f(x) \text{ är strikt växande}}_{\text{Def}}$ men $\underbrace{\text{inte injektiv.}}_{\text{Def}}$ Dvs

Strikt växande: $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ för alla x, y ①

inte injektiv: Det finns $x, y \in D_f$ så att $f(x) = f(y)$ ② och $x \neq y$.

Om $x \neq y$ så gäller $x < y$ eller $x > y$, vi kan anta att $x < y$ (annars byter vi bara namn på x och y).

Då gäller enl. ② att

$f(y) = f(x)$ ③ eftersom $x \neq y$ och enligt ①, eftersom $x < y$, att

$f(x) < f(y)$. ④

Men ③ och ④ implicerar

$f(y) < f(y)$ vilket är en motsägelse då $f(y)$ bara antar ett värde då y är en funktion.

Mer terminologi

Om f och g är funktioner så att

$V_f \subset D_g$ så kan vi sammansätta

funktionerna ~~$f \circ g$~~ $g \circ f(x) = g(\underbrace{f(x)}_{\in D_g})$.

Observera att $g \circ f \neq f \circ g$, inte ens om båda är definierade.

f^{-1} är den funktion (om den existerar) så $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f =$ identiteten

Potensfunktioner och exponentiell funktioner.

Låt oss skapa en funktion. Låt $a > 0$.

Då kan vi definiera, för $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$a^n = \Big\{ \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ stycken}},$$

Bevis:

~~Då gäller~~ $\underbrace{a^n}_{\text{Reellt tal}} \cdot \underbrace{a^m}_{\text{Reellt tal}} = \{\text{def}\} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ st.}} \cdot \underbrace{a \cdots a}_{m} =$

$\{\text{def}\} = a^{n+m}$

Sats: För alla $n, m \in \mathbb{N}_+ = \{1, 2, \ldots\}$, och $a > 0$

$$\underbrace{a^n \cdot a^m}_{\text{definierad}} = a^{n+m}.$$

Def: För $a > 0$ och $n \in \mathbb{Z}$ så är

$$a^n = \begin{cases} a^n & n > 0 \\ 1 & n = 0 \\ \frac{1}{a^{|n|}} & n < 0. \end{cases}$$

~~väldefinierad~~.

Sats: $n, m \in \mathbb{Z}$, $a > 0 \Rightarrow a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.

Bevis: Om $n, m > 0$ så är vi klara enl. föregående sats. Om $n > 0$, $m < 0$ så

$$a^n \cdot a^m = \{\text{def}\} = \frac{\overbrace{\cancel{a} \cdot a \cdot \cancel{a} \cdots a}^{n}}{\underbrace{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdots \cancel{a}}_{|m|}} = a^{n-|m|} = a^{n-(-m)} = a^{n+m}$$

Sats: Om $n, m \in \mathbb{Z}$ & $a > 0$ så
$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}.$$

Bevis: ~ —

Def: Om $x > 0$ och $x^n = a > 0$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$
så definierar vi $a^{\frac{1}{n}} = x$.

Sats: För alla rationella tal p och q så gäller, för $a > 0$, och $b > 0$,
$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}.$$
$$(a^p)^q = a^{p \cdot q}$$
$$(ab)^p = a^p b^p.$$
$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}.$$

Bevis: Gör det själv.

Överkurs (för tillfället). Är a^p definierat för alla $a > 0$ och $p \in \mathbb{Q}$?

Svar: Ja, men det är inte uppenbart hur vet vi att $x^n = a$ har en lösning (det för $a^{\frac{1}{n}}$). Hur vet vi att det finns ett tal $\sqrt[3]{3}$ så att $(\sqrt[3]{3})^3 = 3$? Varför inte noll eller 2?

Hur definierar man $2^{\sqrt{2}}$? $2^{\sqrt{2}} \approx 2^{\frac{141}{100}}$
$\approx 2^{\frac{1414}{1000}}$
$\approx 2^{\frac{14142}{10000}}$

Def: För $a > 0$ och $\alpha \in \mathbb{R}$ så definierar vi

$$a^\alpha = \lim_{\substack{p \to \alpha \\ p \in \mathbb{Q}}} a^p .$$

Leder till massa frågor: ~~Hur~~ Hur definierar man $\lim_{p \to \alpha} a^p$, Är a^α väldefinierad?

Sats [Ta den för givet]: För $a > 0$ så är a^x väldefinierad för alla $x \in \mathbb{R}$. Vidare så gäller

a^x är strikt växande (avtagande) för $a > 1$ $(a < 1)$.

Bevis: Överkurs, bevisuppgift nästa vecka.

Följdsats: a^x har en invers ${}^a\log(y)$.

~~Sats: För $\alpha \in \mathbb{R}$ så är x^α väldefinierad.~~

~~x^α strikt växande för $x > 0$ om $\alpha > 0$.~~

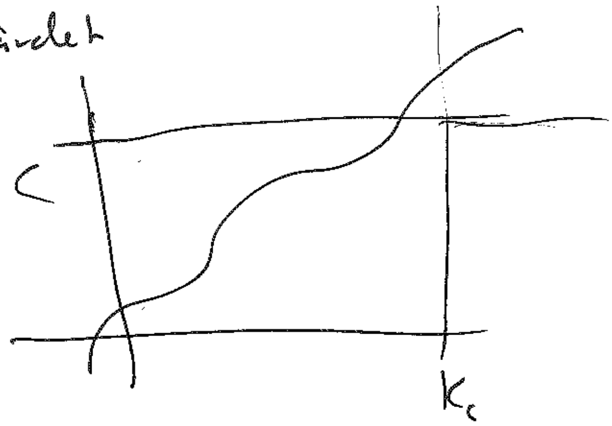
~~Uf.~~

Nu har vi nya funktioner att leka med.

Vi pratade också om gränsvärden i förra föreläsningen.

Vad tror vi om gränsvärdet

$$\lim_{x \to \infty} a^x \ ?$$



Definition: Vi säger att $f(x) \to \infty$ då $x \to \infty$ om det för varje $C > 0$ finns ett K_c så att

$$x > K_c \implies f(x) > C.$$

Sats: Antag att $a > 1$. Då gäller det att

$$\lim_{x \to \infty} a^x = \infty$$

Bevis: Vi går till definitionen för att se vad vi vill visa. Vi will visa att det för varje $C > 0$ existerar (kan räkna fram tex.) ett K_c så att

$$a^x > C \quad \text{för alla } x > K_c. \quad (*)$$

Hur gör vi detta? Vi måste använda våra antaganden. Så vi skriver $a = 1 + p$; $p > 0$

Vi vill då visa att

$$\underbrace{(1+p)^x}_{\substack{\text{vi vet}\\ \text{något om}\\ \text{den här.}}} > C \quad \text{för alla} \quad x > K_C$$

för $x = n \in \mathbb{N}$.

Observera att för $x \geq n$ så

$$(1+p)^x \overset{a^x \text{ är } \text{växande}}{\geq} (1+p)^n = \left\{\begin{matrix}\text{binomial}\\ \text{satsen}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{k} p^k}_{\text{alla termer} > 0} = 1 + np + \underbrace{\frac{n(n-1)}{2} p^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} + \ldots p^n}_{>0}$$

$> 1 + pn$.

Så det räcker att visa att det för varje $C > 0$ finns ett K_c så att

$$x \geq n > K_C \implies C < 1 + pn \left[< (1+p)^n \leq (1+p)^x \right]$$

Så om vi väljer $K_c > \frac{C}{p} + 1$ [ett sådant tal existerar] så kommer

$$x > \frac{C}{p} + 1 \implies \exists n \in \mathbb{N} \quad x \geq n > \frac{C}{p} \implies a^x = (1+p)^x \geq (1+p)^n > 1 + np > 1 + C > C$$

Sats: För varje $a > 1$ och $\alpha \in \mathbb{R}$ gäller det att

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = \infty.$$

Steg 1.

Bevis: Det räcker att bevisa att om $b > 1$ så $\frac{b^x}{x} \to \infty$ då $x \to \infty$. (*)

Bevis steg 1: Om vi har bevisat (*) så följer det att det finns för varje $C > 0$ ett K_{C+1} så att $\frac{b^x}{x} > C+1$ för $x > C+1$

så för $\alpha > 1$

$$x > K_{C+1} \text{ så } \frac{a^x}{x^\alpha} = \left\{\begin{array}{l}\text{exponent} \\ \text{lagar}\end{array}\right\} = \left(\frac{a^{\frac{x}{\alpha}}}{x}\right)^\alpha =$$

$$= \left\{\begin{array}{l}\text{sätt} \\ b = a^{1/\alpha} > 1\end{array}\right\} = \underbrace{\left(\frac{b^x}{x}\right)^{\alpha-1}}_{>1} \underbrace{\frac{b^x}{x}}_{>C} > C$$

Och för $\alpha < 1$ så gäller, med $a = b$,

$$x > K_{C+1} + 1 \implies \frac{a^x}{x^\alpha} \geq \frac{a^x}{x} \cdot \underbrace{x^{1-\alpha}}_{>1} \geq \frac{a^x}{x} = \frac{b^x}{x} > C.$$

Steg 2. Vi visar att om $a > 1$ så

$$\frac{a^x}{x} \to \infty \quad \text{då} \quad x \to \infty.$$

Bevis: Binomialsatsen igen säger att för $n+1 > x \geq n$, $\underbrace{a = 1+p}_{p>0}$

$$\frac{a^x}{x} \geq \frac{(1+p)^n}{x} = \frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k}{x} =$$

$$= \frac{\cancel{1} + \cancel{np} + \frac{n(n-1)}{2}p^2 + \cancel{\ldots p^n}}{x} > \frac{\frac{n(n-1)}{2}p^2}{n+1} =$$

$$= \frac{n^2-n}{2n+2}p^2 = n\left(\frac{1-\frac{1}{n}}{2+\frac{2}{n}}\right)p^2 \geq \left\{\begin{matrix}\text{om} \\ n \geq 2\end{matrix}\right\} \geq$$

gör täljaren så liten som möjligt

$$\geq n\left(\frac{1-\frac{1}{2}}{2+1}\right)p^2 = \frac{p^2}{6}n \geq C \quad \text{om}$$

gör nämnaren så ~~liten~~ stor som möjligt

$$n > \frac{6C}{p^2}.$$

Välj K_C = minsta heltal som är $> \frac{6C}{p^2}$ och ≥ 2

Så om

$$x \geq K_C \Rightarrow \frac{a^x}{x} > C.$$

∎