Låt oss börja med att städa upp lite från förra gången

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Sats: Om } a>1 \text{ så } \lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x} = \infty \\ \\ \text{och för varje } \alpha\in\mathbb{R} \\ \\ \lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = \infty\end{array}}$$

Bevisidé: Låt $[x]$ vara det största heltal mindre än x, och skriv $x=[x]+y$ för $0\le y<1$. Vidare skriv $a=1+p$, $p>0$

Då gäller $[x]\le x\le [x]+1$

$$\frac{(1+p)^x}{x} = \frac{(1+p)^{[x]}(1+p)^y}{x} \geq \frac{(1+p)^{[x]}}{[x]+1} = \left\{\begin{array}{l}\text{sätt}\\ [x]=n\\ \text{binomial}\end{array}\right\} =$$

$$= \frac{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k}{n+1} = \frac{\cancel{1+np}+\frac{n(n-1)}{2}p^2 \cancel{+\dots+p^n}}{n+1} >$$

$$> \frac{n(n-1)}{2n+2}p^2 \geq \left\{\begin{array}{l}\text{för}\\ n\geq 2\end{array}\right\} \geq n \frac{(1-\frac{1}{n})}{2+\frac{2}{n}} \geq n\frac{\frac{1}{2}}{3}p^2 = \frac{np^2}{6}$$

$\geq \frac{1}{2}$ ≤ 1

Vi vill visa att $\forall C>0$ så finns K_C så att

$$x>K_C \Rightarrow \frac{a^x}{x}>C.$$

Men om

$x > \frac{6}{p^2}C + 1 = K_C$ så är $[x] > \frac{6}{p^2}C$ så

$$\frac{(1+p)^x}{x} \geq \frac{[x]p^2}{6} > C.$$

Del 2, vi visar samma detta för $\alpha > 1$ (vilket intuitivt är det ~~enkla~~ svåra fallet).

Observera att om $b = \alpha^{\frac{1}{\alpha}}$ så är $b > 1$

$$\frac{\alpha^x}{x^\alpha} = \frac{b^{\alpha x}}{x^\alpha} = \left(\frac{b^x}{x}\right)^\alpha.$$

Men $\frac{b^x}{x} \to \infty$ då $x \to \infty$ så det finns ett K_1 så att $\frac{b^x}{x} > 1$ om $x > K_1$

och — " — K_C — " — $\frac{b^x}{x} > C$ om $x > K_C$.

Därför så kommer

$$\underbrace{x > \max(K_1, K_C)}_{\text{existerar för varje } C} \Rightarrow \frac{\alpha^x}{x^\alpha} = \left(\frac{b^x}{x}\right)^\alpha = \underbrace{\left(\frac{b^x}{x}\right)^{\alpha-1}}_{>1} \underbrace{\frac{b^x}{x}}_{>C}$$

då $x > K_1$ och $\alpha - 1 > 0$

$> C.$

Vi kommer att acceptera följande sats.

Sats: För $a>1$ så är

a^x definierad för alla $x \in \mathbb{R}$, $V_{a^x} = \{x>0\}$.

a^x är ~~växande~~ strikt växande

$\lim_{x \to \infty} a^x = \infty$ och

$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$

$\boxed{\text{för alla } \varepsilon > 0 \ \exists\, C_\varepsilon > 0 \text{ så att } x < -C_\varepsilon \Rightarrow |a^x| < \varepsilon}$

Följdsats: $a>1$ $1/a^x$ har en invers, som vi kallar ${}^a\log(x)$ så att

$$a^{{}^a\log(x)} = x$$

2) $D_{{}^a\log(x)} = V_{a^x} = \{x \,;\, 0 < x\}$

3) $V_{{}^a\log(x)} = D_{a^x} = \{\mathbb{R}\}$.

4) ${}^a\log(x)$ är strikt växande

5) Och $\lim_{x \to \infty} {}^a\log x = \infty$

6) $\lim_{x \to 0} {}^a\log(x) = -\infty$

Bevis: 1) Eftersom a^x är strikt växande så är a^x injektiv (föreläsning igår) så a^x har en invers.

2 & 3) För alla inverser så gäller

$$D_{f^{-1}} = V_f \quad \text{och} \quad V_{f^{-1}} = D_f$$

4) Vi måste visa att

$$y > x \implies \log(y) > \log(x).$$

Antag motsatsen $\log(y) \leq \log(x)$.

Då gäller, eftersom a^x är strikt växande

$$^a\log(y) \leq {}^a\log(x) \implies a^{^a\log(y)} \leq a^{^a\log(x)}$$

$$\implies y \leq x \quad \text{vilket är}$$

en motsägelse.

5) För varje $C \in V_{^a\log} = \mathbb{R}$ så finns det ett x_C så att

$^a\log x_C = C$. Eftersom $^a\log(x_C)$ är strikt växande så gäller det för alla $C > 0$

$$\underbrace{x > x_C}_{\text{Kalla detta } K_C} \implies {}^a\log x > {}^a\log x_C = C$$

Så $\lim_{x \to +\infty} {}^a\log(x) = \infty$.

6) PSS som 5.

Bevis: Vi definierar t så att $a^t = x$

då kommer $x \to \infty$ att implicera $t \to \infty$

och

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^\alpha}{{}^a\log x} = \lim_{t \to \infty} \frac{(a^t)^\alpha}{{}^a\log a^t} = \lim_{t \to \infty} \frac{(\overbrace{a^\alpha}^{>1})^t}{t} =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} a^\alpha = b \\ b > 1 \end{matrix} \right\} = \lim_{t \to \infty} \frac{b^t}{t} = \infty .$$

$\blacksquare$

SATS! Om $\alpha > 0$ och $a > 1$ så

$$\frac{x^\alpha}{{}^a\log(x)} \to \infty \quad \text{då} \quad x \to \infty$$

Kommentarer

1) Varför bryr vi oss?

Vi har definierat

$\lim_{x \to \infty} f(x)$, ~~...~~ givetvis så kan vi

definiera, på liknande sätt

$$\lim_{x \to 0} f(x).$$

Detta är extremt viktigt, t.ex.

så kommer vi att definiera

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Så för att beräkna derivatan så

behöver vi förstå gränsvärden. Just nu

så arbetar vi oss igenom enkla fall

$\lim_{x \to \infty} x^{\alpha}$, $\lim_{x \to \infty} a^{x}$ et..

Nästa steg är att visa hur gränsvärden

och operationer beter sig så att vi kan

beräkna $\lim \left(f(x)+g(x)\right)$, eller $\lim f(g(x))$

et.c.. och använda vad vi vet om

gränsvärden för sin, cos, log etc för att

säga något om komplicerade funktioner $2^{x} \sin(e^{x} \cdot 4^{-x^4})$

Trigonometriska funktioner.

Väldigt viktigt: Additionsregler

Sats:
$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$
$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x).$$

Kommentar: Derivatan av $\cos(x)$ är

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} = \frac{\cos(x)\cos(h) - \cos(x) - \sin(x)\sin(h)}{h}$$

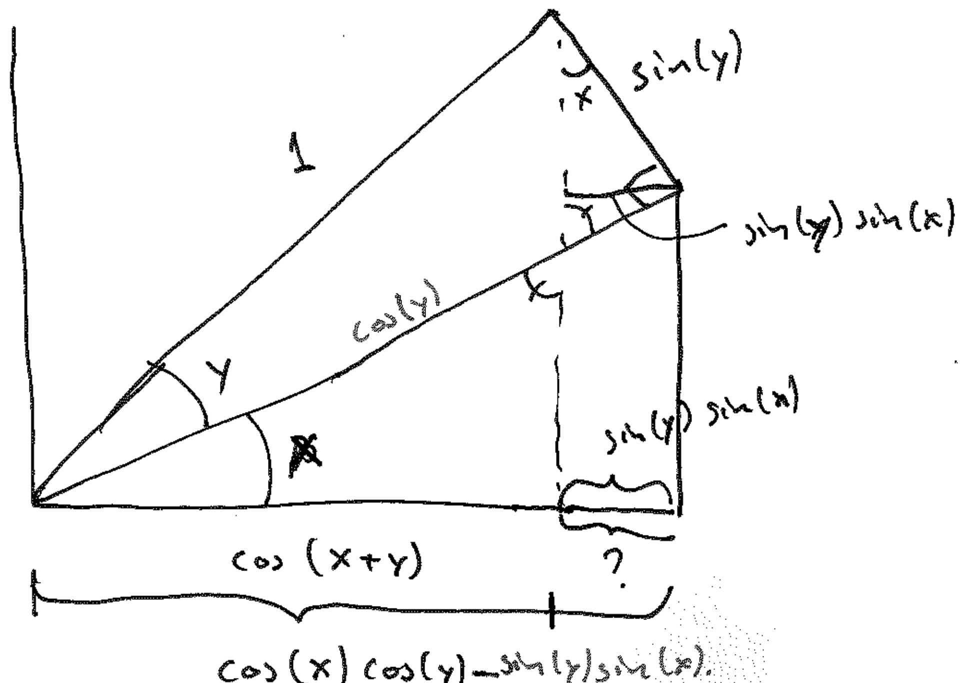
$$= \lim_{h\to 0}\left[\cos(x)\,\frac{\cos(h)-1}{h} - \sin(x)\,\frac{\sin(h)}{h}\right]$$

så med hjälp av att beräkna $\frac{\cos(h)-1}{h}$, $\frac{\sin(h)}{h}$

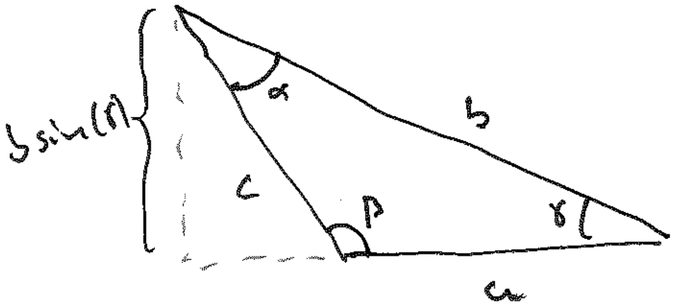
så kan vi beräkna derivatan för alla x.

På samma sätt $\frac{d\,e^x}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = e^x \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}$.

Bevis: Vi bevisar bara den första.



Sats: [sinus satsen]



så gäller

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$$

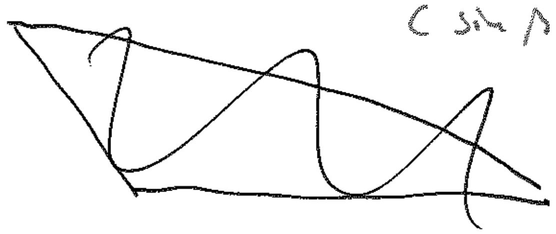
Bevis: Arean av triangeln är $\dfrac{\overbrace{a}^{\text{bas}}\cdot\overbrace{b\sin(\gamma)}^{\text{höjd}}}{2}$

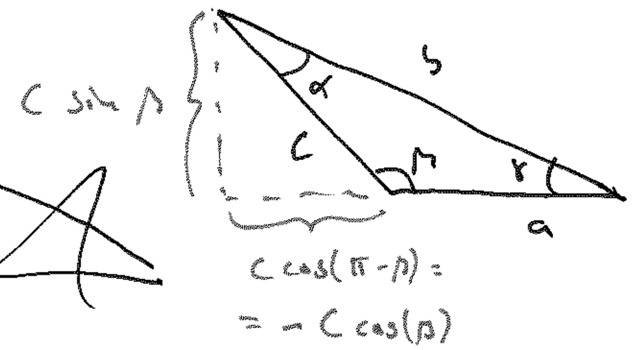
eller $\dfrac{c\cdot b\sin(\alpha)}{2}$

eller $\dfrac{ac\sin(\beta)}{2}$

så $\dfrac{\cancel{a}\cdot\cancel{b}\sin(\gamma)}{\cancel{a}\cancel{b}c\,2} = \dfrac{\cancel{c}\cdot\cancel{b}\sin(\alpha)}{a\cancel{b}\cancel{c}\,2} = \dfrac{\cancel{ac}\sin(\beta)}{\cancel{a}b\cancel{c}\,2}$ $\boxtimes$

Sats [cosinus satsen]





$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)$$

Bevis: Enligt pytagoras sats

$$b^2 = c^2\sin^2\beta + (a - c\cos(\beta))^2 =$$

$$= \underbrace{c^2\sin^2\beta + a^2 - 2ac\cos\beta + c^2\cos^2(\beta)}_{=1} = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)$$ $\boxtimes$

Som vi såg så behövde man beräkna

$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h}$ för att beräkna derivatan av

cosinus. (även av sinus). Så för att senare

kunna ~~beräkna~~ beräkna derivator så behöver vi

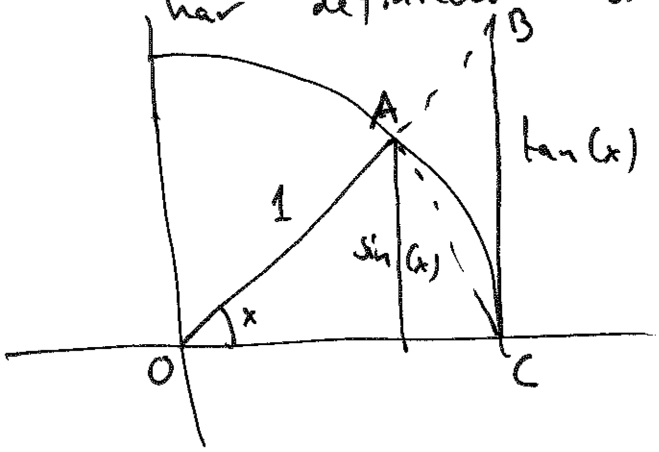
~~Följande sats.~~ besvara följande fråga

Vad är $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}$?

Sats 1: För $0 < x < \frac{\pi}{2}$ så

$$\underbrace{\sin(x)}_{\text{Radianer, alltid radianer.}} < x < \tan(x).$$

Bevis: Vi vitar en bild, eftersom vi har definierat sin och tan grafiskt



Arean av triangeln OAC är $\frac{\sin(x)}{2}$

Arean av triangeln OBC är $\frac{\tan(x)}{2}$

Arean av cirkelsektorn OAC är $\frac{x}{2\pi}$ delen

av hela cirkeln dvs x.

Så

$$\sin(x) < x < \tan(x).$$

Sats: $\underbrace{1 \geq \cos(x)}_{\text{av def.}} > 1 - \frac{x^2}{2}$. om $0 < x < \pi$

Bevis: Enligt föregående sats så är

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) < \frac{x}{2} \quad \text{om} \quad 0 < x < \pi$$

dvs

$$\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) < \frac{x^2}{4}$$

Men

$$\frac{2x^2}{4} > 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \underbrace{1}_{\cos^2(\frac{x}{2}) + \sin^2(\frac{x}{2})} - \underbrace{\cos(x)}_{(\cos^2(\frac{x}{2}) - \sin^2(\frac{x}{2}))}$$

Så

$$\cos(x) > 1 - \frac{x^2}{2}.$$

$\boxed{\text{Q.E.D.}}$

Enl. sats 1 så gäller nu att

$$\frac{\sin(x)}{x} < 1 \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

och

$$x < \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \Rightarrow \cos(x) < \frac{\sin(x)}{x}$$

Så

$$1 - \frac{x^2}{2} < \frac{\sin(x)}{x} < 1 \qquad \text{för } 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

så

$$\left| \frac{\sin(x)}{x} - 1 \right| < \frac{x^2}{2} \qquad \text{för } 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

<u>Definition</u>: Vi säger att $f(x) \to a$ då $x \to x_0$ om det för varje $\varepsilon > 0$ existerar ett $\delta_\varepsilon > 0$ så att

$$\left.\begin{array}{l} |x - x_0| < \delta_\varepsilon \\ \text{och} \quad x \in D_f \end{array}\right\} \Longrightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

<u>Kommentar</u>: Vi kan få funktionsvärdet av f att bli godtyckligt nära a genom att välja x tillräckligt nära x_0.

Observera att x_0 inte behöver höra till definitionsmängden av f. Detta gör att vi kan betrakta derivator

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ vilka inte

är definierade för $h = 0$ (Dela aldrig med noll.)

Sats: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

Bevis: Eftersom $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\cancel{-1} \sin(x)}{\cancel{-1} \cdot x} = \frac{\sin(x)}{x}$

så räcker det att visa satsen för $x > 0$.

Vi vet att, för $x > 0$,

$$\left| \frac{\sin(x)}{x} - 1 \right| < \frac{x^2}{2}.$$

Enligt definitionen, med $x_0 = 0$ och $a = 1$, så måste vi visa att det för varje $\varepsilon > 0$ existerar ett $\delta_\varepsilon > 0$ så att

$$|x| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \left| \frac{\sin(x)}{x} - 1 \right| < \varepsilon$$

Men

$$\left| \frac{\sin(x)}{x} - 1 \right| \leq \frac{x^2}{2} \leq \left\{ \begin{matrix} \text{om} \\ |x| < \sqrt{\varepsilon} \end{matrix} \right\} < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

så välj $\delta_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon}$ så

$$|x| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \left| \frac{\sin(x)}{x} - 1 \right| < \varepsilon.$$

$\blacksquare$