Föreläsning 5.

Vi har bevisat många specialfall av gränsvärden.

Tex: STANDARDGRÄNSVÄRDEN

1) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^p} = 0 \quad p>0$ (Tal ?,1ω i PB - svar på johns skåp)

2) $\lim_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} \infty & a>1 \\ 0 & a<1 \end{cases}$

Bevis: $a^x > (1+p)^n > np \to \infty$

3) $\lim_{x\to\infty} {}^a\log(x) = \begin{cases} \infty & a>1 \\ -\infty & a<1 \end{cases}$

${}^a\log x$ increasing and x large $\Rightarrow$ C large

4) $\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = \begin{cases} \infty & a>1 \\ 0 & 0\leq a<1 \end{cases}$

$a^x > (1+p)^n > \frac{n(n-1)}{2}p^2$

$>? x$

5) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{{}^a\log x} = \begin{cases} \infty & a>1 \\ -\infty & a<1 \end{cases}$

6) $\lim \frac{a^x}{{}^b\log_x} = \begin{cases} \infty & a>1, b>1 \\ 0 & a<1, b>1 \end{cases}$

7) $\lim_{x\to\infty} \sin(x)$ odefinierad

8) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

Ska kunna bevisa

Idag så ska vi bevisa följande satser (vissa i alla fall):

Sats: Om $A, B\in\mathbb{R}$ och $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B$ $\quad$ ($a\in\mathbb{R}$ eller $a=\pm\infty$)

så kommer

$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = AB$ (PRODUKT REGELN)

$\lim_{x\to a} f(x)+g(x) = A+B$ (Summa Regeln)

om $B\neq 0$ $\quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ (Kvot regeln)

Vidare så ska vi bevisa

Sats: [Instängningsregeln] Om, $a \in \mathbb{R}$, eller $a = \pm\infty$,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = A \quad \text{och}$$

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x), \quad \text{då}$$

$$\lim_{x \to a} h(x) = A$$

Varför bryr vi oss?

Exempel: Vad är $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{2^x + x^2 \sin(x^3) + \ln(x)}{e^{2x} + x^4}$?

Svar: Väldigt komplicerad men vi kan gissa att e^{2x} växer snabbast av alla termer så vi skriver

$$\frac{2^x + x^2 \sin(x^3) + \ln(x)}{e^{2x} + x^4} = \frac{\overbrace{\frac{2^x}{e^{2x}} + \frac{x^2 \sin(x^3)}{e^{2x}} + \frac{\ln(x)}{e^{2x}}}^{\text{lättare}}}{\underbrace{1 + \frac{x^4}{e^{2x}}}_{\text{lättare}}} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Det ser ut som att vi kan reducera det svåra talet till två lätta med kvotregeln.

För att använda kvotregeln måste vi visa att nämnaren uppfyller

$$0 \neq \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^4}{e^{2x}}\right) = \left\{\begin{matrix}\text{Summa}\\\text{regeln}\end{matrix}\right\} = \underbrace{\lim_{x\to\infty} 1}_{=1} + \lim_{x\to\infty}\frac{x^4}{e^{2x}} = 1 \qquad (1)$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4}{e^{2x}} \Rightarrow 0$$ enl. standardgränsvärde 4) med

$$\alpha = -4, \quad a = \frac{1}{e^2} < 1.$$

Så nämnaren konvergerar till $1 \neq 0$ så enligt kvotregeln

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2^x}{e^{2x}} + \frac{x^2\sin(x^3)}{e^{2x}} + \frac{\ln(x)}{e^{2x}}}{1+\frac{x^4}{e^{2x}}} = \frac{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2^x}{e^{2x}} + \frac{x^2\sin(x^3)}{2^x} + \frac{\ln(x)}{e^{2x}}\right)}{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^4}{e^{2x}}\right)}$$

$$= \left\{\begin{matrix}\text{summa}\\\text{regeln}\\\text{och } (1)\end{matrix}\right\} = \frac{\overbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{2^x}{e^{2x}}}^{=0} + \overbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\sin(x^3)}{e^{2x}}}^{=0} + \overbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{e^x}}^{=0}}{1} \qquad (2)$$

Nu $\lim_{x\to\infty}\frac{2^x}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{e}\right)^x = 0$ enl. standardgränsvärde 2) då $\frac{2}{e} < 1$.

$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{e^x} = 0$ enligt standardgränsvärde 6)

Det återstår att beräkna $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2 \sin(x^3)}{e^{2x}}$.

Observera att

$$\underbrace{-\frac{x^2}{e^{2x}}}_{f(x)} \leq \underbrace{\frac{x^2 \sin(x^3)}{e^{2x}}}_{h(x)} \leq \underbrace{\frac{x^2}{e^{2x}}}_{g(x)} \qquad (2)$$

Eftersom $\frac{x^2}{e^{2x}} \to 0$ då $x \to \infty$ (Regel 4 standardgränsvärde)

så kommer

$-\frac{x^2}{e^{2x}} \to 0$ då $x \to \infty$ (Produktregeln $f = \frac{x^2}{e^{2x}}$, $g = -1$)

Från (2) och instängningsregeln så följer

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 \sin(x^3)}{e^{2x}} = 0.$$

Vi har således visat, ekvation (2),

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^x + x^2 \sin(x^3) + \ln(x)}{e^{2x} + x^4} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2^x}{e^{2x}} + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2 \sin(x^3)}{e^{2x}} + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{e^{2x}}}{1}$$

$$= \frac{0+0+0}{1} = 0.$$

QED

Så vi har bevärknat

1) Standard gränsvärden

2) Sen bevisar vi summa, produkt, kvot, insättningsregeln

Är det allt?

Nej, vi visar en sammansättningsregel, en regel för olikheter i gränsvärden. Då har vi regler för hur alla enkla funktioner beter sig under gränsvärden, och hur de beter sig när man sammansätter enkla funktioner.

Då kan vi, mer eller mindre, lösa alla gränsvärdestal genom att bara referera till standardgränsvärden [SATSER] och ~~Satser~~ om räkneregler.

Vi såg att det är viktigt att bevisa satser för att det underlättar våra beräkningar. Ni ska kunna alla satser jag nämnt, men vi kommer bara att bevisa ett par av dem.

Vi börjar med den lättaste

Sats: [Summa regeln] Om $A, B \in \mathbb{R}$ och

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \quad ①$$

$$\lim_{x \to a} g(x) = B \quad ②$$

där $a \in \mathbb{R}$ $\underbrace{\text{eller } a = \pm\infty}_{\text{Vi bevisar inte detta.}}$. Då

$$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = A + B. \quad ③$$

Bevis: Vi antar (ekv. 1 och definitionen av lim) att det för varje $\varepsilon > 0$ existerar ett $\delta_{f,\varepsilon} > 0$ så att

$$|x - a| < \delta_{f,\varepsilon} \implies |f(x) - A| < \varepsilon. \quad (*)$$

Och vi antar också att för varje $\varepsilon > 0$ så finns det ett $\delta_{g,\varepsilon} > 0$ så att

$$|x - a| < \delta_{g,\varepsilon} \implies |g(x) - B| < \varepsilon. \quad (**)$$

Vi vill visa, ③, att det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\delta_\varepsilon > 0$ så att $|x-a| < \delta_\varepsilon$

$$\implies |f(x) + g(x) - (A + B)| < \varepsilon \quad ☆$$

Observera att

$$|f(x)+g(x)-A-B| = |(f(x)-A)+(g(x)-B)| \leq \quad (4)$$

$$\leq \left\{\begin{matrix}\text{Triangel}\\ \text{olikheten}\\ |a+b|\leq|a|+|b|\end{matrix}\right\} \leq |f(x)-A| + |g(x)-B|$$

Så om $|x-a| < \delta_{f,\varepsilon/2}$ (5)

och om $|x-a| < \delta_{g,\varepsilon/2}$ (6)

så

$$|f(x)+g(x)-A-B| \leq |f(x)-A| + |g(x)-B| \leq$$

$$\leq \left\{\begin{matrix}(*)\\ \text{och}\\ (5)\end{matrix}\right\} < \frac{\varepsilon}{2} + |g(x)-B| < \left\{\begin{matrix}(**)\\ \text{och}\\ (6)\end{matrix}\right\} < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Så för varje $\varepsilon > 0$ så gäller

om $\delta_\varepsilon \leq \underbrace{\min(\delta_{f,\varepsilon/2}, \delta_{g,\varepsilon/2})}_{\text{existerar}}$ så kommer

$|x-a|<\delta_\varepsilon \Rightarrow \quad |f(x)+g(x)-(A+B)|$.

$\blacksquare$

Sats: Om

$$f(x) \leq g(x)$$

och $\lim_{x \to a} f(x)$ och $\lim_{x \to a} g(x)$ existerar

så

$$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x).$$

Sats: Om $\lim_{x \to a} g(x) = B$ och $\lim_{x \to B} f(x) = A$ så

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = A.$$

We also assume that $f(g(x))$ is defined!

Bevis: Vi vill visa att det för varje $\varepsilon > 0$ ex. ett $\delta_\varepsilon > 0$ så att

$$|x-a| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(\overbrace{g(x)}^{y}) - A| < \varepsilon. \quad (1)$$

Vi vet att $\forall \varepsilon >$ så finns det ett $\delta_{f,\varepsilon} > 0$ så att

$$|y - B| < \delta_{f,\varepsilon} \Rightarrow |f(y) - A| < \varepsilon \quad (2)$$

och ~~för~~ varje $\omega > 0$ så finns det ett $\delta_{g,\omega} > 0$ så att

$$|x-a| < \delta_{g,\omega} \Rightarrow |\overbrace{g(x)}^{y} - B| < \omega. \quad (3)$$

Now choose $\omega = \delta_{f,\varepsilon} > 0$ then

$$|x-a| < \delta_{g,\delta_{f,\varepsilon}} \overset{(3)}{\Rightarrow} |g(x) - B| < \delta_{f,\varepsilon} \overset{(2)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow |f(g(x)) - A| < \varepsilon.$$

But this is the same as (1) if we chose $\delta_\varepsilon = \delta_{g,\delta_{f,\varepsilon}}$.