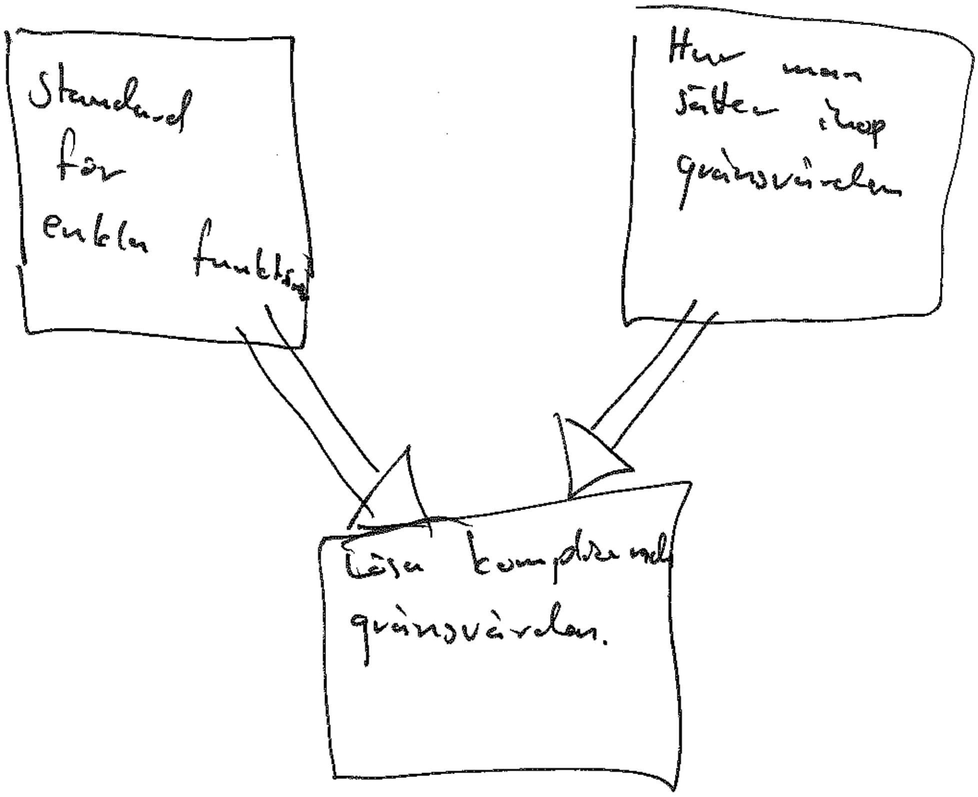
F6

Igår så försökte vi reda ut hur man räknar med gränsvärden

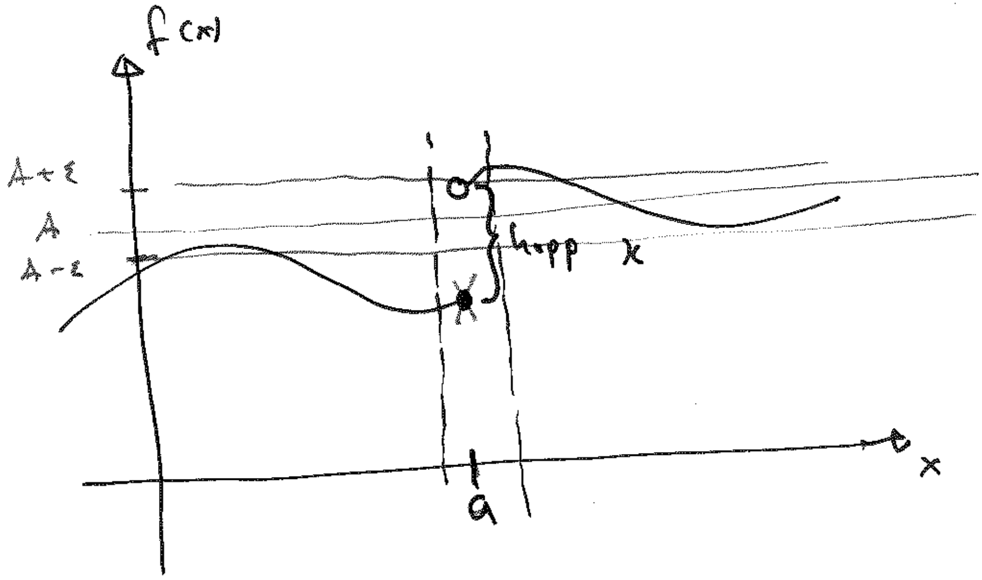


Hur många tittade på det igår?

Idag så ska vi titta lite närmre på gränsvärden och försöka visa att de intuitivt uppfyller vissa bra egenskaper.

Vi kommer även att titta på detta nästa vecka

Någonstans så vill ~~x~~ har vi anpassat definitionen av $\lim_{x \to a} f(x) = A$ för att utesluta hopp



Eftersom $f(x)$ hoppar $k > 0$ så finns det x ~~x~~ godtyckligt nära a så att

$$|f(a) - f(x)| > k > \varepsilon .$$

Dvs för varje $\delta > 0$ så finns ett x ~~x~~ så att $|x-a| < \delta$ (godtyckligt nära)

och $|f(a) - f(x)| > \varepsilon$

Så om $f(x)$ inte har något hopp i a

så kommer det för varje $\varepsilon > 0$ finnas

ett δ så att

$$|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Definition: Vi säger att $f(x)$ är kontinuerlig i $a \in D_f$ om

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Dvs om det för varje $\varepsilon > 0$ existerar ett $\delta_\varepsilon > 0$ så att

$$|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Definition: Vi säger att $f(x)$ är kontinuerlig om f är kontinuerlig i alla $a \in D_f$.

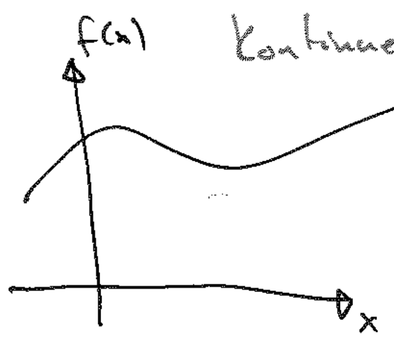
Exempel: Alla elementära funktioner är kontinuerliga.

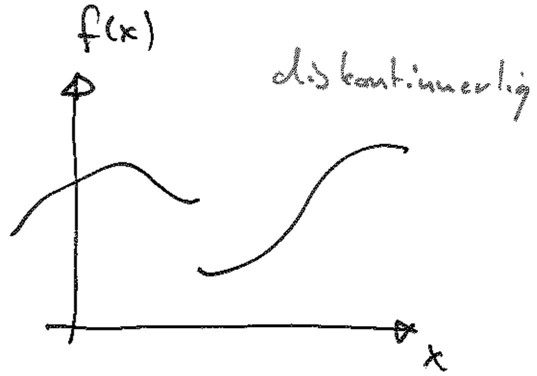
Tex: $\lim_{x \to a} x^2 = \lim_{h \to 0} (a+h)^2 =$

$= \lim_{h \to 0} (a^2 + 2ah + h^2) = \left\{ \begin{matrix} \text{summa} \\ \text{och} \\ \text{produkt} \\ \text{regeln} \end{matrix} \right\} =$

$= \lim a^2 + 2a \lim_{h \to 0} h + \left(\lim_{h \to 0} h \right) = a^2.$

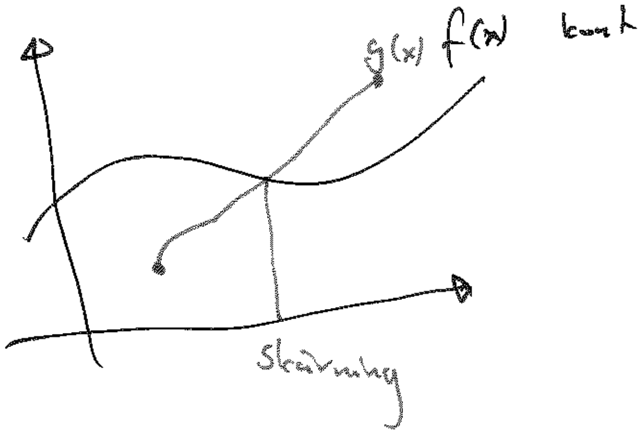
"Grafen av kontinuerliga funktioner saknar hål."

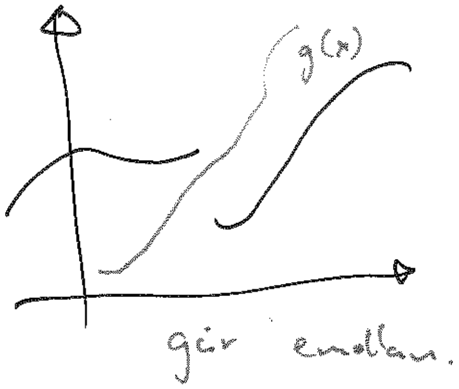




Detta är intuitivt! När vi använder ordet kontinuerlig så får vi bara använda definitionen (vilket är väldigt bra för den kan vi använda för att bevisa saker!) så vi får inte använda "hål" utan endast för varje $\varepsilon > 0$ så finns det ett $\delta > 0$ etc..

Hur kan vi matematiskt formulera "hål"





Nu ska vi göra något väldigt djupt, men det räcker inte att beräkna tal vi vill också visa att den matematik vi gör stämmer med vår intuition.

~~P~~ Hålutslutnings principen:

Antag att $f(x)$ och $g(x)$ är kontinuerliga ~~och~~ på $[a,b]$ och

$f(a) \overset{-g(a)}{>} \overset{0}{\cancel{g(a)}}$ $\qquad$ $f(b) \overset{-g(b)}{<} \overset{0}{g(b)}$

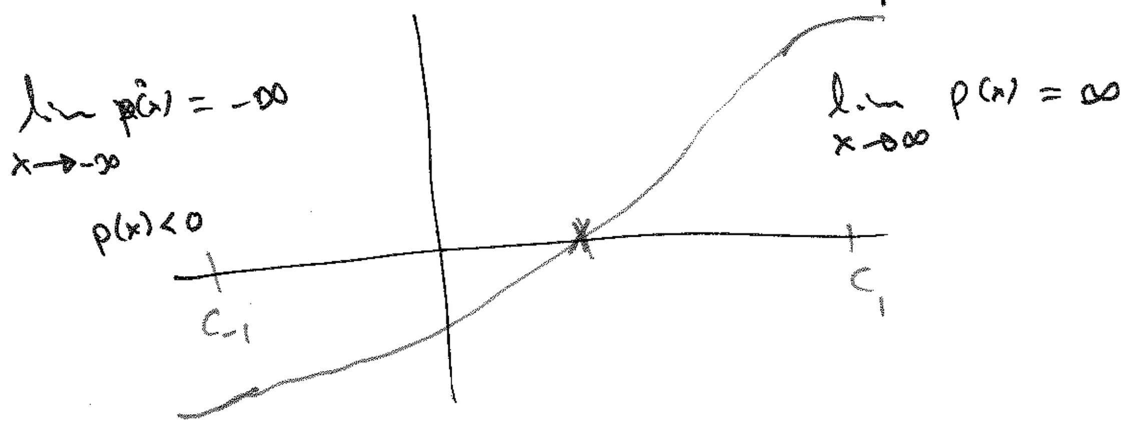
då finns det ett $x_0 \in [a,b]$ så att $f(x_0) = g(x_0)$.

Satsen om mellanliggande värden.

$f(x)$ kont. på $[a,b]$ och

$f(a) < 0 \qquad 0 < f(b)$ så finns det ett $x_0 \in D_f$ så att $f(x_0) = 0$.

Om $\cancel{x}.\ p(x)\ x^3+ax^2+bx+c$ har en lösning



så enligt definition så finns det ett $C_1 > 0$

så att $x > C_1 \Rightarrow p(x) > 1$

och C_{-1} så att

$$x < -C_{-1} \Rightarrow p(x) < -1$$

Är satsen om mellanliggande värden sann?

Exempel: Låt $p(x) = x^2-2$ definierad på $\mathbb{Q}$

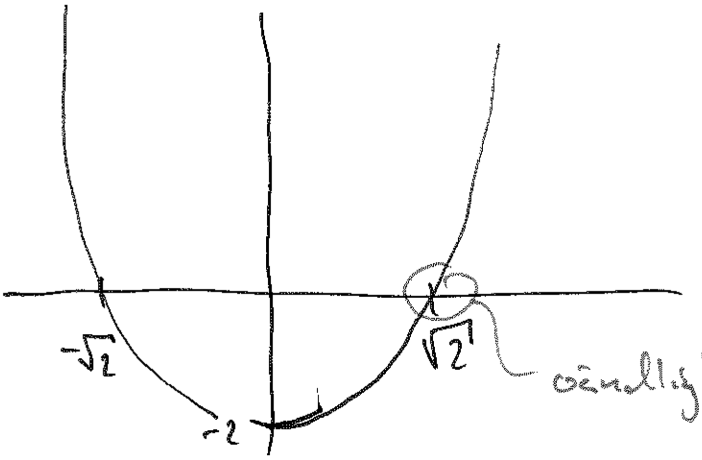
då är $p(0) = -2 < 0$

och $p(2) = 2 > 0$

men det finns inget $x_0 \in \mathbb{Q}$ så

att $p(x_0) = 0$

De rationella talen har hål i sig



Så satsen om mellanliggande värden är falsk på $\mathbb{Q}$! Är den falsk på $\mathbb{R}$? Vad är de reella talen? Vad skiljer dem från de rationella talen?

<u>Supremum egenskapen</u>

Vi låter A vara en mängd tal

[Ex; $A_1 = \{x ; x^2 < 2,\ x \in \mathbb{R}\}$, eller $A_2 = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots\}$

då säger vi att u är en övre begränsning till A om

$$a \leq u \quad \text{för alla} \quad a \in A.$$

[ex: 2 är en övre begränsning till A_1
1 är en — " — A_2]

Vi säger att u är en minsta övre begränsning ~~om~~ till A om

1) u är en övre begränsning till A
2) om v är en övre begränsning till A så $u \leq v$.

Kompletthets axiomet (supremum egenskapen)

Vi antar att varje mängd A av reella tal som är begränsade ovanifrån har en minsta övre begränsning $u \in \mathbb{R}$. Vi skriver $\sup(A) = u$.

Exempel: Den minsta övre begränsningen till A_1 är $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$.

Observera att $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ så $\mathbb{Q}$ uppfyller inte kompletthetsaxiomet – detta är också det enda axiomet som skiljer $\mathbb{R}$ och $\mathbb{Q}$

Nu så har vi ~~ett~~ nytt och kraftfullt verktyg – komplethets egenskapen. Så vi kan visa nya roliga satser!

Sats: Låt $f(x)$ vara växande på $\mathbb{R}$ och begränsad ovanifrån.

Då exsisterar

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \sup(V_f)$$

Bevis: Eftersom $f(x)$ är begränsad så (enl. definition) finns det ett C så att

$$f(x) \leq C \quad \text{för alla } x \in D_f.$$

Enligt komplethets axiomet så finns det ett minsta övre begränsning, u, till

$$V_f = \{ f(x) \, ; \, x \in D_f \}$$

eftersom V_f är begränsad från ovan av C.

Vi vill visa att det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett C_ε så att

$$x > C_\varepsilon \implies |f(x) - u| < \varepsilon$$

Eftersom u är en minsta övre begränsning så är $u-\varepsilon$ (för varje $\varepsilon>0$) inte en övre begränsning till U_f.

Det innebär att ~~det~~ finns ett $x_\varepsilon \in D_f$ så att

$$f(x_\varepsilon) > u-\varepsilon$$

men då $f(x)$ är växande så

$$x > x_\varepsilon \implies u-\varepsilon < \underbrace{f(x_\varepsilon) \le f(x)}_{\text{växande}} \underbrace{\le u}_{\substack{u \text{ är} \\ \text{en övre} \\ \text{begränsning}}} < u+\varepsilon$$

så

$$x > x_\varepsilon \implies -\varepsilon < f(x)-u < \varepsilon \implies$$

$$|f(x)-u| < \varepsilon.$$

∎

Följdsats: Om $f(n)$ är växande, ~~och~~ definierad på $\mathbb{N}$ och begränsad ovan så

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = \sup_{x\in U_f} x.$$

Beviset är samma.

Sats: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ är växande och uppåt begränsad.

Specifikt så existerar $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ $\left(=e \text{ per definition}\right)$

Bevis: Låt $m>n$, då ska vi bevisa att

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left\{\begin{matrix}\text{Binomial}\\ \text{satsen}\end{matrix}\right\} =$$

$$= 1+\binom{m}{1}\frac{1}{m}+\binom{m}{2}\frac{1}{m^2}+\binom{m}{3}\frac{1}{m^3}+\ldots+\binom{m}{k}\frac{1}{m^k}+\ldots+\binom{m}{n}\frac{1}{m^n}+\binom{m}{m}\frac{1}{m^m}$$

$$-\left(1+\binom{n}{1}\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+ \qquad \binom{n}{k}\frac{1}{n^k}+\binom{n}{n}\frac{1}{n^n}\right)\geq$$

$$\geq\left(1+m\frac{1}{m}+\ldots+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)}{k!}\frac{1}{m^k}+\ldots\binom{m}{n}\frac{1}{m^n}\right)$$

$$-\left(1+ \qquad \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k}+\ldots\right)$$

$$=\left(1+m\frac{1}{m}+\ldots+\frac{1\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{m}\right)}{k!}+\right)$$

$$\qquad\qquad\vee\qquad\qquad\qquad\vee$$

$$-\left(1+n\frac{1}{n}+\ldots\frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{k!}\right)\geq 0$$

eftersom $\left(1-\frac{j}{m}\right)>\left(1-\frac{j}{n}\right)$ då $m>n$.

enligt tidigare beräkning så är

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \frac{1}{m^k} = \sum_{k=0}^{m} \frac{1\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{m}\right)}{k!}$$

$$\leq \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \leq 1+1+\sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k!} \leq$$

$$\leq \left\{ \frac{1}{k!} = \frac{1}{1\cdot 2\cdots k!} < \frac{1}{2^{k-1}} \right\} \leq 2 + \sum_{k=2}^{m-1} \frac{1}{2^{k-1}} < 3.$$

Så $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m < 3$ och således begränsad.