Tal: ~~Skriv~~ skriv $-\sqrt{3}\sin(x) + \frac{1}{2}\cos(x)$

på formen $a\cos(x+\varphi)$.

(omskrivning med hjälpvinkel.

Vi vill hitta a och φ så att

$$-\sqrt{3}\sin(x) + \frac{1}{2}\cos(x) = a\cos(x+\varphi).$$

Vad vet vi om cos och sin. Det finns inte många satser att välja mellan.

Problemet vi har är att vi har $\cos(\underbrace{x+\varphi}_{\text{plussar 2 tal}})$

i HL och $\cos(\underbrace{x}_{\text{samma } x})$ och $\sin(\underbrace{x}_{\text{samma } x})$ i VL.

Det ser ut som att man kan använda additionsreglerna för cos.

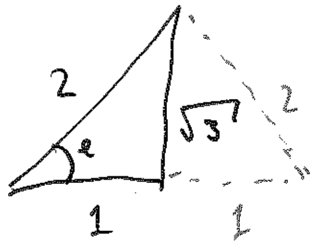
$$a\cos(x+\varphi) = a\cos(\varphi)\cos(x) - a\sin(\varphi)\sin(x) =$$

$$= \frac{1}{2}\cos x - \sqrt{3}\sin(x)$$

Likheten gäller uppenbarligen om

$$\left.\begin{aligned} a\cos(\varphi) &= \frac{1}{2} \\ a\sin(\varphi) &= \sqrt{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \tan(\varphi) = \sqrt{3}$$

Definition av tan



$$\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3} (+ n\pi)$$

$$\cancel{\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3} + n\pi}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos(\varphi) &= \frac{1}{2} \\ \sin(\varphi) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad a = 2.$$

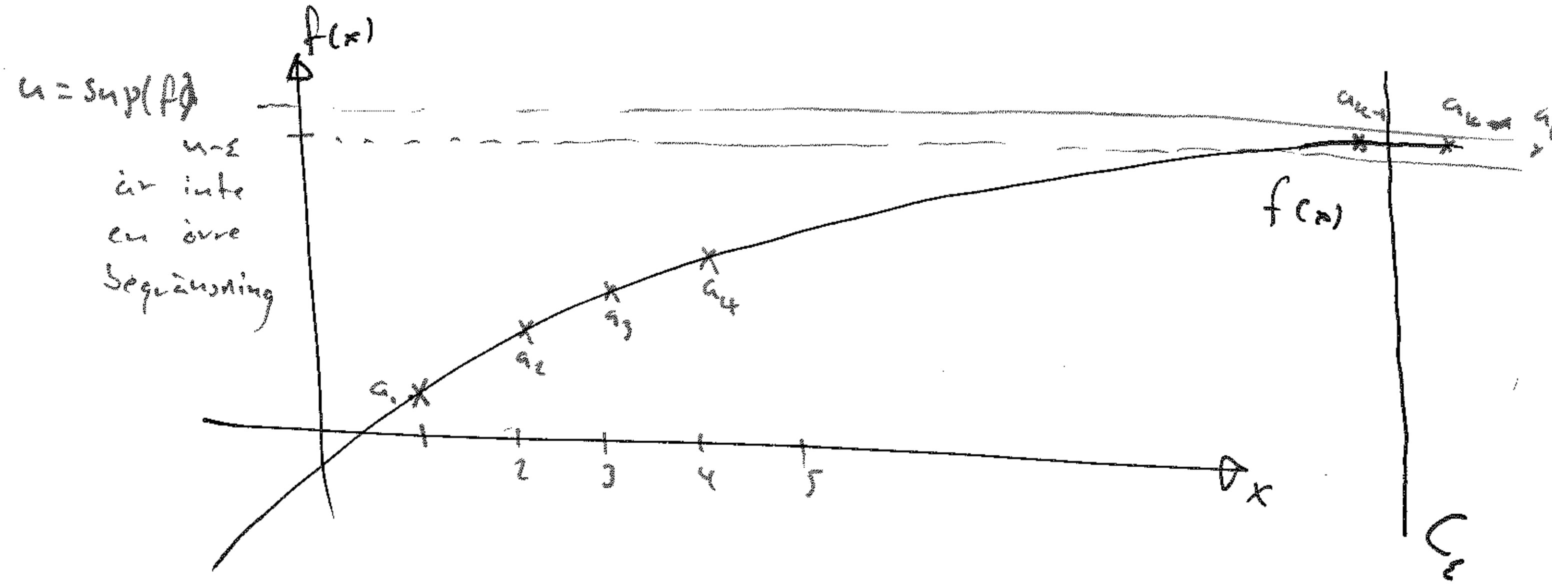
Så $-\sqrt{3}\sin(x) + \cos(x) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ = svar.

Föreläsning 7.

Förra veckan bevisade vi följande fantastiska resultat.

Sats: Låt $f(x)$ vara en begränsad från ovan och växande funktion från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$.
Då existerar gränsvärdet
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \sup f(x) = \text{Minsta övre begränsning till } V_f$$

Bevis idee



Så $\underbrace{-\varepsilon < f-u \le 0}$ för $x > C_\varepsilon$

$|f-u| \le \varepsilon$ — " —

Definition: Låt $a_1, a_2, \dots, a_3, \dots a_k, \dots$ vara en ordnad följd av tal. Då säger vi att a_k, eller ibland $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, är en sekvens.

Vi kan också se en sekvens som en funktion $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ så $f(n) = a_n$

Följdsats: Om a_k är en växande och begränsad från ovan ($a_{k+1} \geq a_k \ \forall k$) sekvens så kommer

$$\lim_{k \to \infty} a_k = \sup\{a_k ; k \in \mathbb{N}\} = u$$

dvs för alla $\varepsilon > 0$ så existerar det ett $C_\varepsilon > 0$ så att

$$|a_k - u| < \varepsilon \quad \text{för alla} \quad k > C_\varepsilon$$

Observera att den här satsen (och följdsatsen) skiljer sig i sin natur från föregående satser. Tidigare så har vi alltid talat om $f(x) \to \begin{cases} \text{tal} \\ \infty \\ -\infty \end{cases}$ men i den här satsen så har vi ingen antag om vad gränsvärdet är och vi argumenterar abstrakt.

Sats (och definition): Definiera sekvensen

$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, då är a_n växande och ~~uppåt~~ begränsad från ovan.

Således existerar

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

(där e definieras enligt ovanstående).

Bevis: Enkelt, men komplicerade beräkningar. Enl. binomial

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \underbrace{\binom{n}{0}\frac{1}{n^0}}_{=1} + \underbrace{\binom{n}{1}\frac{1}{n}}_{\leq 1} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} +$$

$$+ \dots + \underbrace{\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}}_{} + \dots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} < 2 + \sum_{k=2}^{n} \underbrace{\frac{1}{k!}}_{} \leq 2 + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{2^{k-1}} \leq 3.$$

$$< \frac{\cancel{n}\cdot\cancel{(n-1)}\cdot\ldots\cdot\cancel{(n+1-k)}}{k!}\,\cancel{\frac{1}{n^k}}$$

$$\frac{1}{k\cdot(k-1)\cdot(k-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$$

Så $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$ för alla n. Dvs begränsad från ovan.

För att visa att $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ är växande så räcker det att visa att $m<n \Rightarrow \left(1+\frac{1}{m}\right)^m < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \left(1-\frac{1}{m}\right)^m = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} - \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{1}{n^k} =$$

$$= \binom{n}{0}\frac{1}{n^0} + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \dots \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} + \dots + \binom{n}{m}\frac{1}{n^m} + \dots \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}$$

övre raden > undre.

$$- \left[\binom{m}{0}\frac{1}{m^0} + \binom{m}{1}\frac{1}{m} + \dots + \binom{m}{k}\frac{1}{m^k} + \dots + \binom{m}{m}\frac{1}{m^m}\right] + 0$$

jämför dessa

$$\frac{n(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n^k\, k!} - \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)}{m^k\, k!} =$$

$$\left[1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) - 1\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ \left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right]\frac{1}{k!}$$

Men $\left(1-\frac{j}{n}\right) > \left(1-\frac{j}{m}\right)$ eftersom $n>m$

så

$$\left[1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) - 1\left(1-\frac{1}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{m}\right)\right] > 0$$

Så $\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} > \binom{m}{k}\frac{1}{m^k}$ för alla $k=0,\dots,m$.

Så $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \left(1+\frac{1}{m}\right)^m$. $\blacksquare$

$$\boxed{\text{Följdsats} \quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.}$$

Bevis

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \le \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad \text{om} \quad n=[x] \quad (*)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left\{\begin{matrix}\text{Produkt}\\ \text{regeln}\end{matrix}\right\} = \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{=1}\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{=e}$$

Och

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = \left\{\begin{matrix}\text{kvot}\\ \text{regeln}\end{matrix}\right\} = \frac{e}{1} = 1.$$

Så satsen följer av (*) och instängningsregeln.

$\blacksquare$

Sats: Följande gränsvärden gäller

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 .$$

Bevis: Vi använder (utan att ha bevisat) att logaritmen är kontinuerlig för $x > 0$.

Därför

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \ln(1+x) = \lim_{x \to 0^+} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} =$$

$$= \left\{ y = \frac{1}{x} \right\} = \lim_{y \to \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = \ln e = 1 .$$

På samma sätt

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\ln(1+x)}{x} = + \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1-x)}{-x} =$$

$$= + \lim_{x \to 0^+} \ln \left(1 - x\right)^{\frac{1}{x}} = + \lim_{y \to \infty} \ln\left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-y} =$$

$$= + \lim_{y \to \infty} \ln \left(\cdot \frac{y-1}{y} \right)^{-y} = + \lim_{y \to \infty} \ln \frac{\cancel{110}}{\left(\frac{y}{y-1}\right)^y} =$$

$$= + \lim_{y \to \infty} \ln \frac{\cancel{1}}{\left(\cancel{1} + \frac{\cancel{1}}{y-1}\right)^y} = + \lim_{y \to \infty} \ln \left(\frac{\cancel{1}}{\left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^{y-1}} \right) \left(\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{y-1}\right)} \right)$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \log \\ \log \end{matrix} \right\} = + \lim \ln \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^{y-1} + \ln\left(1 + \frac{1}{y+1}\right) = \ln e$$