Förra föreläsningen började vi att bevisa

Sats: Följande gränsvärden gäller

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Bevis: Igår sade vi att

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\ln (1+x)^{\frac{1}{x}}\right)$$

och vi delade upp $\lim\limits_{x\to 0}$ i två fall

Fall 1: $\lim\limits_{x\to 0^+}$, så subst $\frac{1}{x}=y$ så $y\to\infty$.

Fall 2 " $\lim\limits_{x\to 0^-}$ "

$$\lim_{x\to 0^-} \ln\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \ln\left(1-x\right)^{-\frac{1}{x}} = \left\{\begin{matrix}\text{substituera}\\ y=\frac{1}{x}\\ y\to\infty\end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{y\to\infty} \ln \underbrace{\left(1-\frac{1}{y}\right)}_{\frac{y-1}{y}}^{-y} = \lim_{y\to\infty} \ln\left(\frac{y-1+1}{y-1}\right)^{+y} = \lim_{y\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{(y-1)\left(1+\frac{1}{y-1}\right)}$$

$$= \left\{\begin{matrix}\text{summa}\\ \cancel{\text{produkt}}\\ \text{regeln}\end{matrix}\right\} = \lim_{y\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1} + \ln \underbrace{\lim \left(1+\frac{1}{y-1}\right)}_{=1} = \left\{\begin{matrix}\text{subst}\\ y-1=z\end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{y \to \infty} \ln\left(1+\frac{1}{z}\right)^z + \lim_{z\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{z}\right).$$ (1)

Nu vet vi att $\left(1+\frac{1}{z}\right)^z \to e$ och

att $1+\frac{1}{z} \to 1$. Vidare så antar vi att

logaritmen är kontinuerlig så

$$\lim_{x \to x^0} \ln(x) = \ln(x_0)$$ så

$$\lim_{z\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{z}\right)^z = \ln(e) = 1$$

och $$\lim_{z\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{z}\right) = \ln 1 = 0.$$

insatt i (1) ger $\lim_{x\to 0^-} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1$

specifikt så har vi visat att

$$\lim_{x\to 0^\pm} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

För att bevisa $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ så

gör vi substitutionen

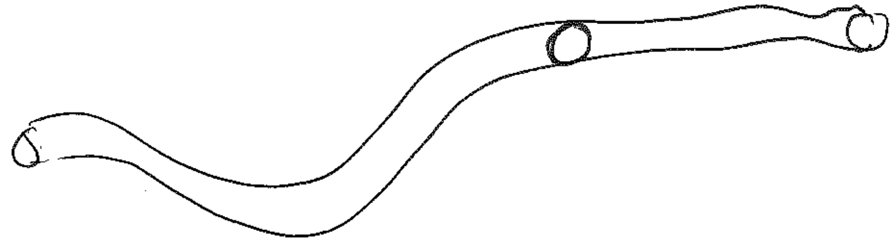
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \left\{ \begin{array}{l} \ln(y+1) = x \\ \text{då kommer} \\ y \to 0 \text{ då } x \to 0 \end{array} \right\} =$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{e^{\ln(y+1)} - 1}{\ln(y+1)} = \lim_{y \to 0} \frac{\cancel{y}\ 1}{\underbrace{\ln(y+1)}_{y}} = \left\{ \text{kvotregeln} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\lim_{y \to 0} \frac{\ln(y+1)}{y}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Bad Jollen.

8706551 m



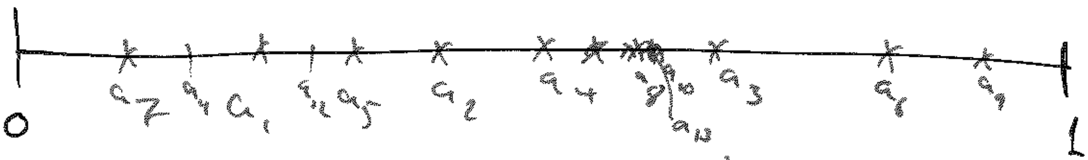
Hur många gånger Jollen kan sägas?

Vad har det att göra med analys?

Jo, det hjälper oss att "hitta punkter på $\mathbb{R}$"

- viktiga punkter.

T.ex, antag att vi har en sekvens $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$ Har den något gränsvärde?



måste klumpa ihop sig någonstans!

Detta innebär att vi kan välja en ut vissa a_k

a_k	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	$\dots$
a_{k_j}			a_3		a_5	a_6		a_8	$\dots$

$k_1 = 3$ $\quad k_2 = 5$ $\quad k_3 = 6$ $\quad k_4 = 8$

~~Mer generellt~~

Definition: Om a_k, $k = 1, 2, \dots$, är en sekvens och k_j är en strikt växande sekvens av naturliga tal så säger vi att a_{k_j} är en delsekvens av a_k

Fråga: Om a_k är en begränsad sekvens. Kommer a_k att ha en konvergent delsekvens?

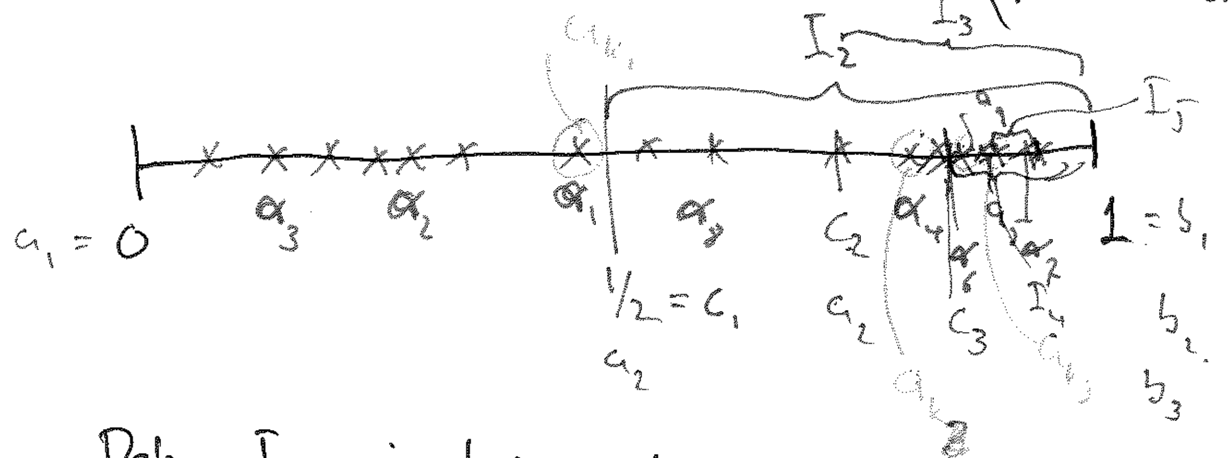
Hur hittar vi gränsvärdet?

<u>Sats</u> (Bolzano - Weierstrass)

Antag att a_k är en ~~sekvens~~ begränsad sekvens. Då existerar en delsekvens a_{k_j} så att $\lim_{j \to \infty} a_{k_j}$ ~~$= a$ för~~ existerar

(Dvs. det finns ett $a \in \mathbb{R}$ så att $\lim_{j \to \infty} a_{k_j} = a$).

Bevis idé: Antag att $a_k \in I_1 = [0,1]$ ~~$0 \leq a_k \leq 1$~~ (~~annars~~ för enkelhets skull).



Dela I_1 i två med punkten c_1.

Antingen ligger oändligt många punkter a_k i den övre halvan av I_1, som vi då kallar I_2, annars finns oändligt många i den undre halvan som då kallas I_2.

~~Dela~~ Kalla höger och vänster punkterna i I_2 för a_2 och b_2.

Dela I_2 på mitten med c_2 etc..

Sätt a_{k_j} som det minsta k värdet så att $a_{k_j} > a_{k_{j-1}}$ och $a_{k_j} \in I_j$.

Observera att alla $a_{k_j} \in I_l$ för $j \geq l$ och $|I_l| \leq 2^{-(l-1)} \to 0$

så a_{k_j} borde konvergera.

Vi ska inte gå igenom hela beviset nu utan istället bevisa nästa sats noga.

Sats: Låt $f(x)$ vara kontinuerlig på $[a_1, b_1] \subset \mathbb{R}$

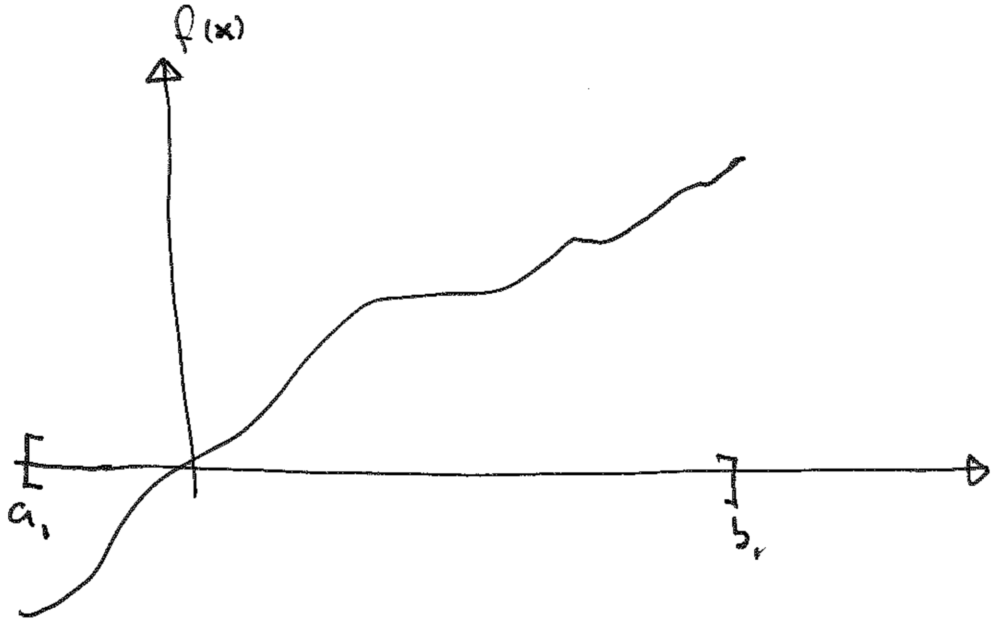
$f(a_1) < 0$ och $f(b_1) > 0$

Då finns det ett $x_0 \in [a_1, b_1]$ så att

$f(x_0) = 0$.

Bevis: Vi använder Bolzano-Weierstrass idee

för att hitta nollstället



Sätt $I_1 = [a_1, b_1]$. Vi konstruerar I_{k+1} från I_k

via induktion.

1. Antag att $I_k = [a_k, b_k]$ och $f(a_k) < 0$, $f(b_k) > 0$.

Välj $c_k = \frac{b_k - a_k}{2}$ (mittpunkten på intervallet)

Fall 1 Om $f(c_k)=0$ så har vi ett nollställe och satsen är sann.

Fall 2 Om $f(c_k)>0$ så sätter vi

$$I_{k+1}=[a_k, c_k]=[a_{k+1}, b_{k+1}].$$

Då uppfyller I_{k+1} (1) och

$$b_{k+1}-a_{k+1}=\frac{1}{2}(b_k-a_k) \quad (2)$$

och $a_k \le a_{k+1}$ och $b_{k+1} \le a_{k+1}$ (3)

Fall 3 Om $f(c_k)<0$ så sätter vi

$$I_{k+1}=[c_k, b_k]=[a_{k+1}, b_{k+1}]$$

då uppfyller I_{k+1} ekvation (1) och (2). (3)

Slutsats. Antingen så har f ett nollställe eftersom Fall 1 gäller för något k.

Eller så har vi konstruerat

a_k som är en växande sekvens så att $f(a_k)<0$. och $a_k \le b_1$

b_k som är en avtagande sekvens så att $f(b_k)>0$ och $a_1 \le b_k$.

Eftersom a_k är växande och begränsad så kommer $\lim_{k\to\infty} a_k = x_0$ för något x_0

Vidare så gäller det att $\lim_{k\to\infty} \underbrace{f(a_k)}_{<0} \Rightarrow f(x_a) \leq 0$ (4)

enligt sats om olikhet i gränsvärde, och f kontinuerlig.

På samma sätt så kommer

$$\lim_{k\to\infty} f(b_k) = f(x_b) \geq 0. \qquad (5)$$

Men, $\underbrace{b_k - a_k \leq}_{\text{enligt (3)}} \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} = \frac{b_{k-2} - a_{k-2}}{2^2} = \ldots = \frac{b_1 - a_1}{2^{k-1}}$

så $b_k = a_k + \frac{b_1 - a_1}{2^{k-1}} \Rightarrow$

$$x_b = \lim_{k\to\infty} b_k = \lim_{k\to\infty}\left(a_k + \frac{b_1 - a_1}{2^{k-1}}\right) = \begin{Bmatrix}\text{samma}\\ \text{regeln}\end{Bmatrix} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} a_k + \underbrace{\lim_{k\to\infty} \frac{b_1 - a_1}{2^{k-1}}}_{=0} = x_a.$$

Så $x_a = x_b$ ~~och $f(x_a) \leq 0 \leq f(x_b)$~~

definiera $x_0 = x_a = x_b$. Då gäller enl (4) och (5)

$f(x_0) \leq 0$ och $f(x_0) \geq 0$ så $f(x_0) = 0$.

∎

Sats: Antag att $f(x)$ är kontinuerlig på $[a,b]$ (slutet begränsat intervall). Då är

$f(x)$ begränsad

Bevis: För alla $x_0 \in [a,b]$ gäller $\lim_{x_j \to x_0} f(x_j) = f(x_0) < \infty$.

Vi argumenterar med ett motsägelse argument och antar att $f(x)$ inte är begränsad.

Specifikt så är j inte en övre begränsning till $f(x)$ så det finns ett

$x_j \in [a,b]$ så att $f(x_j) > j$.

Så x_j är en sekvens i $[a,b]$ så det finns en konvergent delsekvens $x_{j_k} \to x_0$. Eftersom $f(x)$ är kontinuerlig så

$$\lim_{k \to \infty} f(x_{j_k}) = f(x_0)$$

men $f(x_{j_k}) > j_k \to \infty$ så

$f(x_0) = \lim_{k \to \infty} f(x_{j_k}) = \infty$ vilket är en motsägelse.

$\boxtimes$