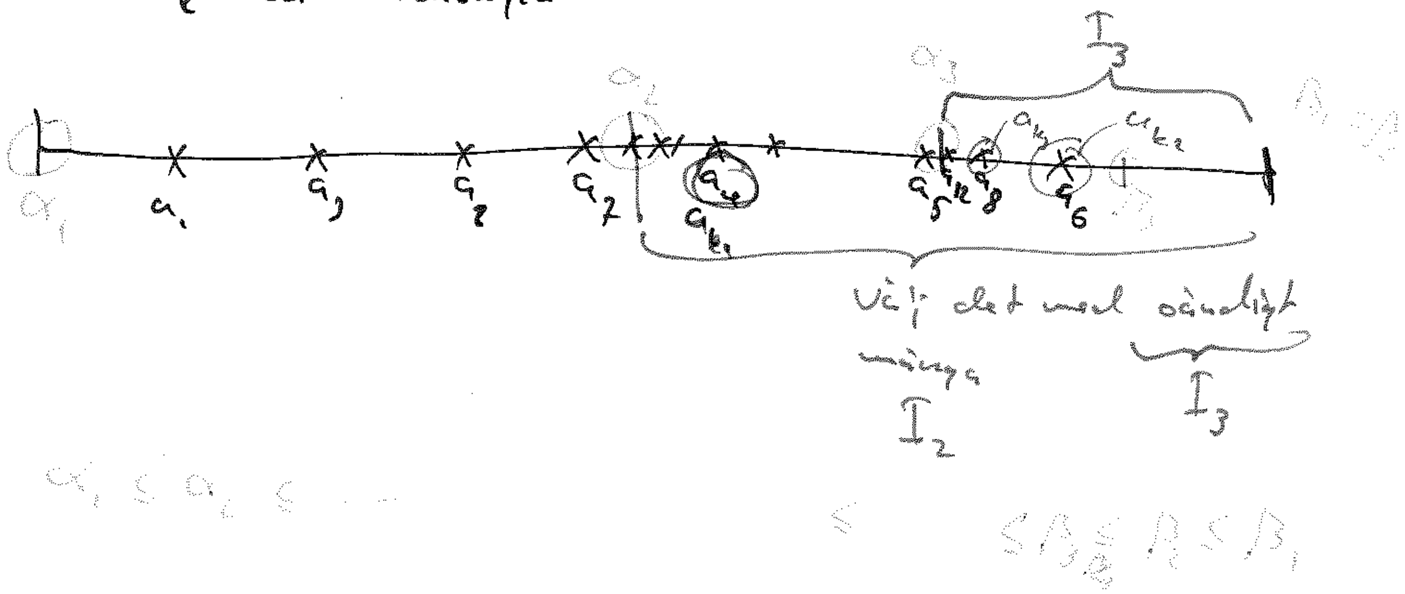
Föreläsning 11

1) Idag så kommer vi att sammanfatta teorin för kontinuerliga funktioner.

2) Introducera oändliga serier

Vi bevisar flera satser som visar att vår teori är rätt - dvs. fångar det essentiella med kontinuerliga funktioner.

1) Bolzano-Weierstrass. Om a_k är en sekvens och $a_k \in [a,b]$ för alla k då har a_k en konvergent delsekvens. [Bara reella tal!]

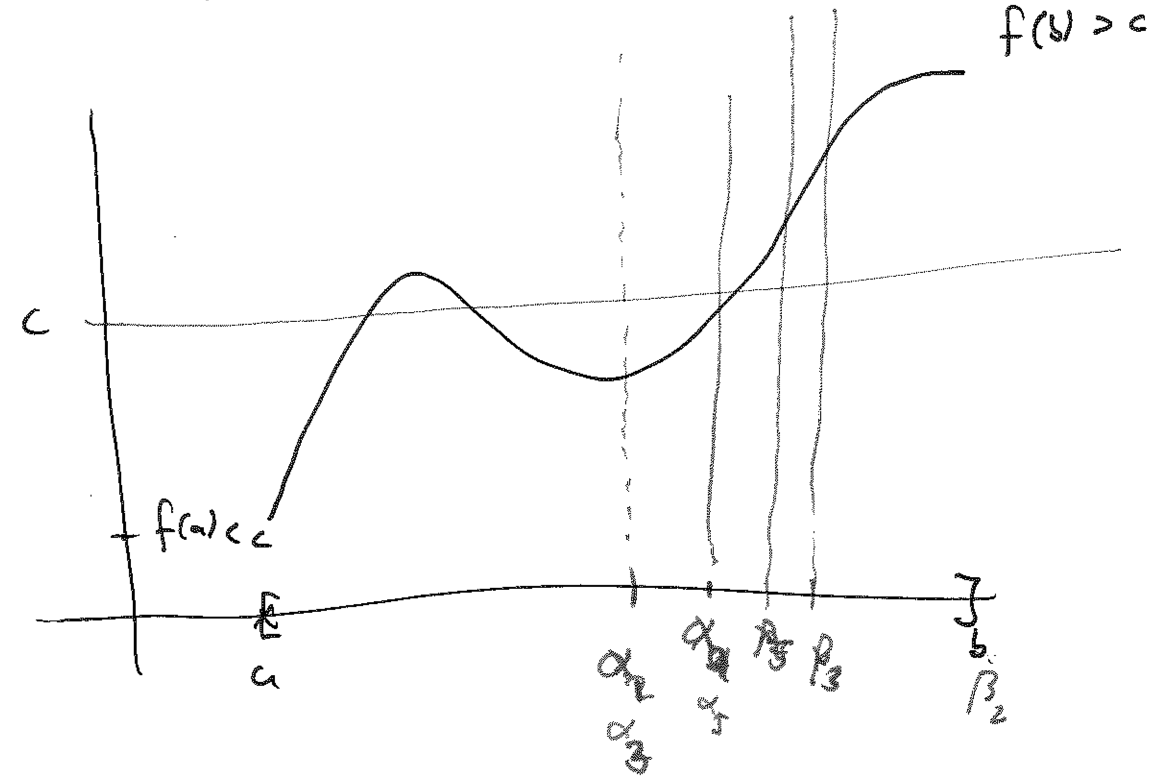


α_k växande och begränsad
β_k avtagande och begränsad $\Big\} \Rightarrow$ konvergent enl. supremumegen. "fullständighetsaxiomet"

$\lim \alpha_k - \beta_k = 0$ Varför

$\alpha_j \le a_{k_j} \le \beta_j \longrightarrow$ a_{k_j} konvergent enligt instängning

2 Mellanliggande värden



Vi vet $\alpha_k \to \alpha_0 = \beta_0 \leftarrow \beta_k$ (Samma argument)

Nu

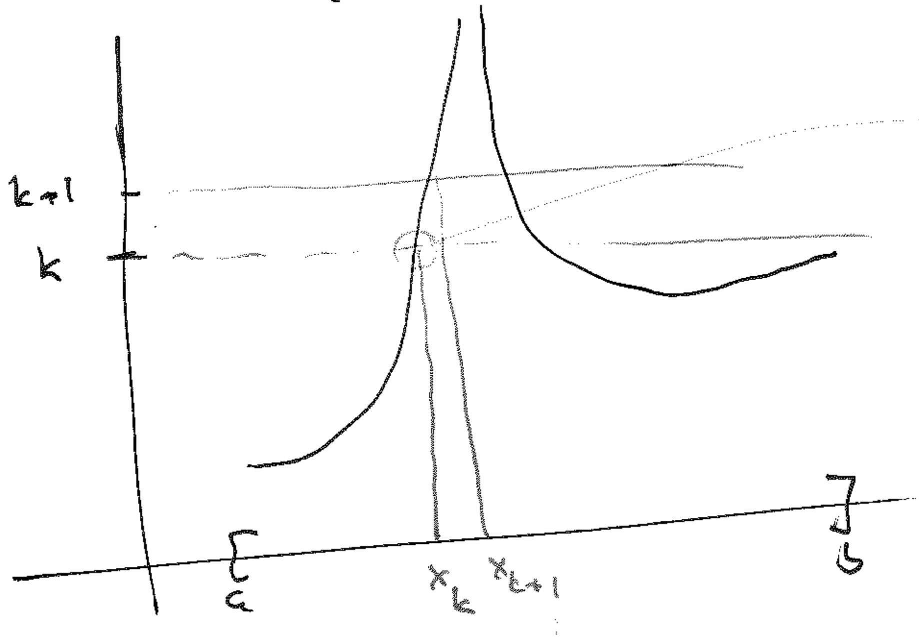
$f(\alpha_k) < c \Rightarrow \lim_{k\to\infty} f(\alpha_k) = f(\alpha_0) \leq c$

$f(\beta_k) \geq c \Rightarrow \lim_{k\to\infty} f(\beta_k) = f(\alpha_0) \geq c$

Definitionen av kontinuitet.

$\Rightarrow f(\alpha_0) = c$

3/ f kontinuerlig på $[a,b]$ $\Rightarrow$ f begränsad



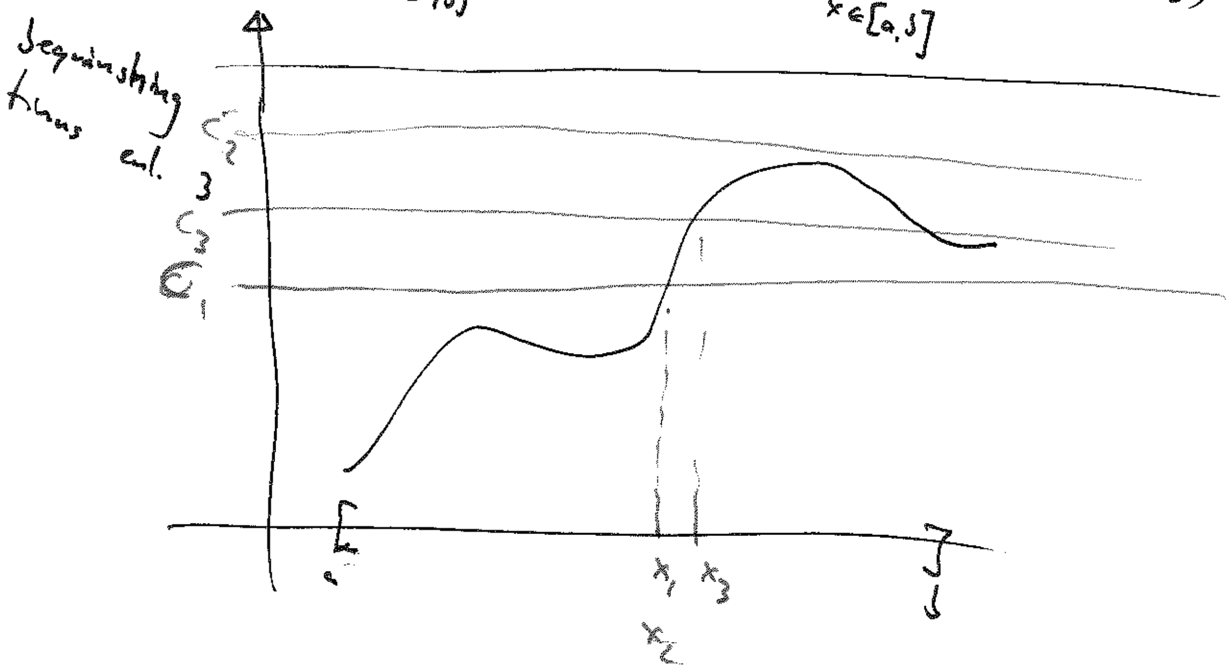
$\Rightarrow$ Delsekvens x_{k_j} som konvergerar till x_0

$$f(x_0) = \lim_{j\to\infty} f(x_{k_j}) = \lim_{j\to\infty} k_j = \infty$$

kont.

4) f kontinuerlig på $[a,b]$ $\Rightarrow$ $\exists\, x_+, x_-$ så att

$$\sup_{x\in[a,b]} f(x) = f(x_+), \quad \inf_{x\in[a,b]} f(x) = f(x_-)$$



Serier

Exempel: Vad är $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^k k^2}{(k+1)^2}$?

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k^3)}{2^k}$?

Med ~~...~~ maximalt fel på 10^{-5}.

Just nu så kan vi inte besvara dessa frågor. Vi behöver

1) Definiera vad det betyder att addera oändligt många tal (inte självklart)

2) Hitta några satser som hjälper oss beräkna dessa.

3) Sen kan vi lösa talen.

Vi vet hur man beräknar

$S_j = \sum_{k=3}^{j} a_k$ för alla ändliga j.

Vi $\underbrace{\text{förstår}}$ också vad det innebär $\lim_{j \to \infty} S_j$

Dvs har definierat och vet hur man beräknar

Definition: Låt $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ vara en serie

då säger vi att

$$S_j = \sum_{k=m}^{j} a_k \quad \text{är en delsumma.}$$

Om $\lim_{j \to \infty} S_j = S$ konvergerar så säger vi

att $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ konvergerar och skriver

$$\sum_{k=m}^{\infty} a_k = S.$$

Dvs $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar om det

1 för enkelhets skull

för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $N_\varepsilon > 0$ så att, för något S,

$$\left| \sum_{k=1}^{K} a_k - S \right| < \varepsilon \quad \text{för varje } K > N_\varepsilon.$$

Observation. ~~Då~~ Om $\sum a_k$ konvergerar, då

$$|a_{K+1}| = \left| \sum_{k=1}^{K+1} a_k - S - \left(\sum_{k=1}^{K} a_k - S \right) \right| \le \left\{ \begin{matrix} \text{triangel} \\ \text{olikheten} \end{matrix} \right\} \le \left| \sum^{K+1} a_k - S \right| + \left| \sum^{K} a_k - S \right| < 2\varepsilon$$

om $K > N_\varepsilon$.

Så om $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar så finns det

ett $\tilde{N}_\varepsilon \; (= N_{\varepsilon/2} + 1)$ så att

$$|a_k| < \varepsilon \quad \text{för alla } k > \tilde{N}_\varepsilon.$$

$\Rightarrow a_k \to 0.$

Sats: Om $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar

så $a_k \to 0$.

Ta 5.

Exempel. $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^k k^2}{(k+1)^2}$ divergerar.

Lösning. Om $\sum \frac{(-1)^k k^2}{(k+1)^2}$ konvergerar

så skulle

$$\left| \frac{(-1)^k k^2}{(k+1)^2} \right| \to 0.$$

Men $\lim_{k\to\infty} \left| \frac{(-1)^k k^2}{(k+1)^2} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^2} = \left\{ \begin{matrix} \text{kvot} \\ \text{regel} \end{matrix} \right\} =$

$$= \frac{1}{\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^2} = \left\{ \text{produkt} \right\} = \frac{1}{\underbrace{\left(\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)^2}_{\to 1 \text{ standard}}} = 1.$$

Vi har två problem för att visa att en serie konvergerar

Teori för sekvenser.
$\begin{cases} 1) \text{ Vi måste visa att gränsvärdet } S \text{ existerar} \\ 2) \text{ — '' — } S_j \to S. \end{cases}$

Sats: Om $a_k \geq 0$ och det finns ett M ~~och sådant~~ $\sum_{k=1}^{N} a_k \leq M$ (begränsad) för varje N. Då konvergerar $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Bevis. Vi måste visa att S_j är växande och begränsad.

1) Växande: Observera att

$$S_{j+1} - S_j = \sum_{k=1}^{j+1} a_k - \sum_{k=1}^{j} a_k = a_{j+1} \geq 0.$$

så $S_{j+1} \geq S_j$

2) $S_j = \sum_{k=1}^{N} a_k \leq M$ så S_j är begränsad

$\Rightarrow$ S_j konvergerar.

Exempel. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k^3)}{2^k}$ konvergerar.

Lösning. Vi betraktar a_k^+ och a_k^- där

$$a_k^{\pm} = \begin{cases} \pm \frac{\sin(k^3)}{2^k} & \text{om } \pm \frac{\sin(k^3)}{2^k} \geq 0 \\ 0 & \text{om } \pm \frac{\sin(k^3)}{2^k} \leq 0. \end{cases}$$

då $a_k^{\pm} \geq 0$ och

$$0 \leq |a_k^{\pm}| \leq \left| \frac{\sin(k^3)}{2^k} \right| \leq \frac{1}{2^k}$$

Så $\sum_{k=1}^{N} a_k^{\pm} \leq \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2^k} = \cancel{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{N+1}}\right) = 1 - \frac{1}{2^N} < 1$

Så $\sum_{k=1}^{N} a_k^{\pm}$ är begränsade och växande. Alltså konvergenta. Men

$$\sum_{k=1}^{N} a_k = \sum_{k=1}^{N} a_k^+ - \sum_{k=1}^{N} a_k^-$$

så, summaregeln

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} a_k = \underbrace{\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} a_k^+}_{\text{existerar}} - \underbrace{\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} a_k^-}_{\text{existerar}}$$

Så $\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim S_N$ existerar.

Följdsats. ~~10~~ Antag att

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \text{ konvergerar} \qquad \left(\text{Def } \sum a_k \text{ är absolut konvergent}\right)$$

då konvergerar $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Exempel. Vad är $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k^3)}{2^k}$, med

maximalt fel på 10^{-5}.

Lösning: Observera att för $M > N$

$$\left| \sum_{k=1}^{M} \frac{\sin(k^3)}{2^k} - \sum_{k=1}^{N} \frac{\sin(k^3)}{2^k} \right| = \left| \sum_{k=N+1}^{M} \frac{\sin(k^3)}{2^k} \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=N+1}^{M} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^N} - \frac{1}{2^M}.$$

Låt $M \to \infty$, då $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \sum_{k=1} \frac{\sin(k^3)}{2^k} = S$

Så

$$\left| S - \sum_{k=1}^{N} \frac{\sin(k^3)}{2^k} \right| \leq \lim_{M\to\infty} \left(\frac{1}{2^N} - \underbrace{\frac{1}{2^M}}_{\to 0} \right) = \frac{1}{2^N}$$

$\frac{1}{2^N} < 10^{-5}$ om $N > 5 \, {}^{2}\log 10 \approx 16.61$

Så det räcker att summera de 17 första termerna $\displaystyle\sum_{k=1}^{17} \frac{\sin(k^3)}{2^k}$ = DATOR.