Lite Kommentarer om Gränsvärden

På föreläsningen (Föreläsning 2 för att vara exakt) så introducerade vi definitionen

Definition 1. *Vi säger att $f(x)$ går mot a då x går mot oändligheten, uttryckt i symboler som $f(x) \to a$ när $x \to \infty$ eller $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$, om det för varje $\epsilon > 0$ existerar ett C_ϵ så att*

$$|f(x) - a| < \epsilon \quad \text{\textit{för varje} } x > C_\epsilon. \tag{1}$$

Den här definitionen är väldigt abstrakt men också ganska naturlig. Meningen med detta dokument är att du ska få en förståelse för definitionen. Mer specifikt så vill jag att:

1. Du ska kunna Definition 1 och 2 utantill.
2. Du ska inse att definitionen sammanfaller med vår intuition och är därför naturlig.
3. Du ska kunna använda definitionerna för att beräkna gränsvärden.

Låt oss börja med ett exempel för att se att Definitionen 1 är naturlig.

Exempel: En fysiker har en teori som säger att universums temperatur kommer, att med tiden, gå mot noll Kelvin. Termodynamikens tredje lag säger att temperaturen aldrig aldrig kan bli noll Kelvin så vi får anta att fysikern menar att universums temperatur går mot noll då tiden går mot oändligheten (för temperaturen blir ju aldrig noll för en given tid). Men vad kan han mena med detta? Hur skulle vi intuitivt tolka ett sådant påstående matematiskt?

Om temperaturen går till noll så verkar det rimligt att det finns en tidpunkt, låt oss kalla den tidpunkten för $T_{506.15}$ så att temperaturen kommer att vara mindre än 506.15K efter den tidpunkten. Det är nämligen så att papper självantänder vid 506.15K och om det så om ingen sådan tidpunkt existerade så skulle det finnas godtyckligt stora tider då papper självantänder. Det verkar rimligt att om temperaturen går mot noll så kan det inte vara så varmt att papper självantänder lite då och då i all oändlighet.

Men det borde också finnas en tidpunkt, kalla den $T_{373.15}$, så att temperaturen, låt oss kalla (den maximala) temperaturen i universum vid tidpunkten t för $f(t)$, är mindre än $373.15K$ för alla tidpunkter efter $T_{373.15}$. Annars så skulle ju vatten börja spontankoka (vid atmosfärtryck) lite då och då i all oändlighet. Något som vi inte associerar med att temperaturen går mot noll.

På samma sätt så borde det finnas en tidpunkt T_4 då temperaturen är mindre än $4K$, dvs $f(t) < 4$, för alla tidpunkter efter T_4. Helium kokar nämligen vid $4K$ och om helium börjar spontankoka lite då och då för all oändlighet så kan vi ju inte säga att temperaturen går mot noll.

Men det måste också finnas en tidpunkt $T_{0.95}$ så att $f(t) < 0.95$ för alla $t > T_{0.95}$. För om temperaturen skulle gå över 0.95K lite då och då i all oändlighet så skulle helium smälta lite då och då och vi skulle inte kunna säga att temperaturen går till noll.

Det måste och så finnas en tidpunkt $T_{10^{-5}}$ så att $f(t) < 10^{-5}$ för alla $t > T_{10^{-5}}$. Annars skulle Rubidium atomer i en gas ibland börja spontanröra sig med en hastighet av 5cm/sekund lite då och då...

Kort sagt så måste det, för varje möjlig temperatur $\epsilon > 0$ finnas en tidpunkt $T_\epsilon > 0$ så att $|f(t)| < \epsilon$ för alla $t < T_\epsilon$. Här har vi satt in absolut belopp i $|f(t)| < \epsilon$, för temperaturer behövs inget absolutbelopp då de alltid är större än noll mätta i Kelvin.

Vi måste hålla med om att ovanstående resonemang är rimligt. Därför så är det rimligt att bestämma att temperaturen i universum, $f(t)$, går till noll då tiden, t, går till oändligheten om det för varje $\epsilon > 0$ existerar ett $T_\epsilon > 0$ så att $|f(t)| < \epsilon$ då $t > T_\epsilon$.

Men detta är inget annat än definitionen av $f(t) \to a$ då $t \to \infty$ som definierat i Definition 1 om vi sätter $a = 0$. Så vår definition uttrycker i matematiska formler vad vi intuitivt tillskriver uttrycket "temperaturen går till noll". Samma intuition gäller naturligtvis för andra funktioner än temperaturer.

Om du inte tycker att det ovanstående är absolut jätterimligt så hoppas jag att du inte tycker att det är orimligt. För det är Definition 1 som vi kommer att använda i den här kursen.

Definition 1 har flera otroligt bra egenskaper som gör att den är väldigt användbar:

1. För det första så blir vi av med det krångliga ∞. Med det menar jag att den ekvationen vi kommer att använda i våra beräkningar är (1) där ∞ inte ingår. Så vi behöver aldrig använda ∞ i några beräkningar vilket är nödvändigt eftersom vi inte riktigt kan tillskriva något värde till $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$ etc.

2. Under första föreläsningen så diskuterade vi absolutbelopp och olikheter. Förhoppningsvis så har ni räknat lite på dessa själva. Det gör att vi kan göra de relevanta beräkningarna som är nödvändiga i (1).

3. Dessutom så överensstämmer definitionen med vår intuition vilket gör att vi kan använda intuitionen när vi tänker på gränsvärden. När vi gör bevis så måste vi använda formlerna och beräkningar. Men i många fall så kan vi gissa svaren vilket förenklar beräkningarna avsevärt.

4. Slutgiltigen så är det värt att påpeka att trots att definitionen använder det lite högtravande och mycket abstrakta uttrycket "det existerar ett C_ϵ" så kommer vi oftast att räkna ut ett C_ϵ som funkar. Vi skulle ha kunnat använda uttrycket "om det för varje $\epsilon > 0$ *går att hitta ett* C_ϵ så att...". För i realiteten så kommer vi beräkna ett C_ϵ som har egenskapen i definitionen. Om vi kan beräkna C_ϵ så existerar det definitivt. Vi väljer dock att använda "existerar" istället för "hittar" för i vissa knepiga fall så kan man inte beräkna ett C_ϵ utan bara visa att ett måste finnas. Så med det mer abstrakta uttrycket "existerar" så kommer definitionen att inkludera även de abstrakta fallen.

En viktig aspekt av en bra definition är att den kan användas för att göra beräkningar. Så vi måste fråga oss om vi kan använda definitionen för att beräkna enkla gränsvärden.

Exempel 1: *Visa att* $\frac{1}{x^2} \to 0$ *då* $x \to \infty$.

Svar: Vi måste visa att det för varje $\epsilon > 0$ existerar ett C_ϵ så att:

$$\left|\frac{1}{x^2}\right| < \epsilon \quad \text{för alla } x > C_\epsilon,$$

eller annorlunda uttryckt

$$x > C_\epsilon \text{ implicerar att } \left|\frac{1}{x^2}\right| < \epsilon. \tag{2}$$

Vi ser direkt att

$$\left|\frac{1}{x^2}\right| < \epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\epsilon} < x^2 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \leq |x|.$$

Så om $x > 1/\sqrt{\epsilon}$ så följer det att $\left|\frac{1}{x^2}\right| < \epsilon$. Vi har därför visat att det finns ett C_ϵ (vi kan nämligen välja $C_\epsilon = 1/\sqrt{\epsilon}$) för varje $\epsilon > 0$ så att (2) håller. Därmed så är beviset klart. $\square$

Problem: *Om du behöver göra några egna beräkningar (rekommenderas) så visa följande:*

a) $\dfrac{7x^2}{2x^5} \to 0$ då $x \to \infty$ **b)** $\dfrac{4}{\sqrt{x}} \to 0$ då $x \to \infty$.

Innan vi fortsätter och diskuterar gränsvärden $\lim_{x\to x^0} f(x)$ så vill jag säga något mer om beräkningar av gränsvärden. Det kanske är förvånande att höra att Definitionen 1 är vald på ett sätt för att göra beräkningar så enkla som möjligt. Men om man läser definitionen noga så inser man att vi inte behöver hitta ett speciellt C_ϵ, det räcker med vilket C_ϵ som helst så att följande implikation är uppfylld

$$x > C_\epsilon \text{ implicerar att } |f(x) - a| < \epsilon. \tag{3}$$

Detta gör att vi inte behöver beräkna $|f(x) - a|$ exakt vilket ofta leder till avsevärda förenklingar i våra beräkningar. Ta följande exempel.

Exempel 2: Visa att $\frac{\sin(x)}{x^2+1} \to 0$ då $x \to \infty$.

Svar: Det som gör det här exemplet besvärligare än det förra är att det är mycket svårare att hitta de x för vilka

$$\left|\frac{\sin(x)}{x^2+1}\right| < \epsilon.$$

Men vi vet att $|\sin(x)| \leq 1$ och att $\frac{1}{x^2+1} < \frac{1}{x^2}$ (eftersom nämnaren är mindre i $\frac{1}{x^2}$). Vi kan därför göra uppskattningen

$$\left|\frac{\sin(x)}{x^2+1}\right| \leq \left|\frac{1}{x^2+1}\right| < \frac{1}{x^2}. \tag{4}$$

Och eftersom

$$x > \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \text{ implicerar att } \left|\frac{1}{x^2}\right| < \epsilon$$

så följer det att

$$x > \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \text{ implicerar att } \left|\frac{\sin(x)}{x^2+1}\right| \leq \left|\frac{1}{x^2}\right| < \epsilon.$$

Men detta visar att

$$x > \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \text{ implicerar att } \left|\frac{\sin(x)}{x^2+1}\right| < \epsilon,$$

vilket visar att $\frac{\sin(x)}{x^2+1} \to 0$ då $x \to \infty$. $\square$

Nästa förenkling använder också att vi vill hitta ett C_ϵ, vilket som helst, så att (3) gäller. Antag att det finns ett sådant C_ϵ. Då gäller det att för varje $\tilde{C}_\epsilon > C_\epsilon$ att

$$x > \tilde{C}_\epsilon \Rightarrow x > C_\epsilon \Rightarrow |f(x) - a| < \epsilon,$$

där vi använde (3) i det sista steget. Detta innebär att om det finns ett C_ϵ så att (3) gäller så gäller (3) för alla $\tilde{C}_\epsilon > C_\epsilon$.

Detta kan användas på följande sätt. För att visa att $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$ så letar vi efter ett C_ϵ så att (3) gäller. Men eftersom (3) också gäller för varje $\tilde{C}_\epsilon > C_\epsilon$ så är det inget hinder att antaga att $C_\epsilon > 1000$ eller $C_\epsilon > 10^{10}$ eller vad helst vi önskar. För om vi kan hitta ett $C_\epsilon > 0$ så att (3) gäller så kan vi hitta ett annat C_ϵ som är större än 1000 (eller 10^{10} om vi så vill) så att (3) gäller för det nya C_ϵ.

Vi kan alltså antaga att C_ϵ är större än vilket tal som helst som vi önskar. Detta ger oss en ny information att jobba med. Låt oss titta på ett exempel.

Exempel 3: *Visa att* $\frac{x^2+x}{x^2-x+1} \to 1$ *då* $x \to \infty$.

Svar: Vi vill (enligt Definition 1 med $a = 1$) visa att det för varje $\epsilon > 0$ finns ett $C_\epsilon > 0$ så att

$$x > C_\epsilon \text{ implicerar att } \left|\frac{x^2+x}{x^2-x+1} - 1\right| < \epsilon.$$

Efter att skriva $\frac{x^2+x}{x^2-x+1} - 1$ på ett bråksträck så ser vi att det är samma sak som

$$x > C_\epsilon \text{ implicerar att } \left|\frac{2x-1}{x^2-x+1}\right| < \epsilon.$$

Intuitivt så vet vi att $2x$ borde vara den dominerande termen i täljaren och att x^2 borde vara den dominerande termen i hela uttrycket. Vi måste dock hitta något sätt att föra in den intuitionen i våra beräkningar.

Låt oss börja med det svåraste, att använda att x^2 dominerar nämnaren. Observera att om $x > 2$ så är $\frac{1}{2}x^2 > x$ så om $x > 2$ så gäller det att

$$|x^2 - x + 1| > \left|\frac{1}{2}x^2 + 1\right| > \left|\frac{1}{2}x^2\right|.$$

Det följer att om $x > 2$ så är

$$\left|\frac{2x-1}{x^2-x+1}\right| < \left|\frac{2x-1}{\frac{1}{2}x^2}\right| < \left|\frac{2x}{\frac{1}{2}x^2}\right| = 4\left|\frac{1}{x}\right|.$$

Vi har alltså visat att om

$$x > 2 \text{ så gäller } \left|\frac{2x-1}{x^2-x+1}\right| < \left|\frac{4}{x}\right|. \tag{5}$$

Så det räcker att hitta ett $\hat{C}_\epsilon$ (Vi kan tex. välja $\hat{C}_\epsilon = \frac{1}{4\epsilon}$.) så att

$$x > \hat{C}_\epsilon \text{ implicerar att } \left|\frac{4}{x}\right| < \epsilon. \tag{6}$$

För då följer det direkt att om $x > 2$ och $x > \hat{C}_\epsilon$ då gäller

$$\left|\frac{2x-1}{x^2-x+1}\right| < \left\{\begin{array}{l} \text{enligt (5)} \\ \text{eftersom } x > 2 \end{array}\right\} < \left|\frac{4}{x}\right| < \tag{7}$$

$$< \left\{\begin{array}{l} \text{enligt (6)} \\ \text{eftersom } x > \hat{C}_\epsilon \end{array}\right\} < \epsilon. \tag{8}$$

Vi har således bevisat att om $x > 2$ och $x > \frac{1}{4\epsilon}$ så gäller

$$\left|\frac{x^2+x}{x^2-x+1} - 1\right| < \epsilon.$$

Vi kan alltså välja C_ϵ som vilket tal som helst som uppfyller $C_\epsilon > 2$ och $C_\epsilon > \hat{C}_\epsilon = \frac{1}{4\epsilon}$, tag tex $C_\epsilon = 2 + \frac{1}{4\epsilon}$. Då gäller det, enligt (7)-(8) att

$$x > C_\epsilon \text{ implicerar att } \left|\frac{x^2+x}{x^2-x+1} - 1\right| < \epsilon.$$

Vi har därmed bevisat att gränsvärdet gäller. □

Problem: *Om du behöver göra några egna beräkningar (rekommenderas) så visa följande:*

a) $\dfrac{\sin(x) + x^2\cos(2x)}{x^3+2} \to 0$ då $x \to \infty$ **b)** $\dfrac{x^2+3}{x^3-x+3} \to 0$ då $x \to \infty$.

c) $\dfrac{2x^2}{\frac{1}{2}x^2 - x + 2} \to 4$ då $x \to \infty$ **d)** Att $\dfrac{x^2\cos(x)+1}{x+1}$ inte konvergerar då $x \to \infty$.

Ledtråd för d): *Titta på "Lösningar till vissa tal" vecka 36 för en annan uppgift där man visar att något inte konvergerar.*

Gränsvärden när $x \to b$.

Nästa gränsvärde vi ska beräkna är när $x \to b$ då $b \in \mathbb{R}$, dvs b är inte oändligheten. Vi tänker lite på samma sätt som för gränsvärden då $x \to \infty$. Om vi försöker resonera lite intuitivt vad vi skulle mena med att $f(x) \to a$ när $x \to b$. Så kanske vi skulle tänka att ju närmre x är punkten b ju närmre är funktionsvärdet $f(x)$ talet a.

Om vi tolkar absolutbeloppet som avståndet så skulle detta innebära att desto mindre $|x-b|$ är desto mindre är $|f(x)-a|$. Detta verkar rimligt (eller hur?). Så vi kan säga att $f(x) \to a$ då $x \to b$ om

$$|x-b| \text{ är litet så följer det att } |f(x)-a| \text{ är litet.} \tag{9}$$

Matematiskt så är detta inte precist nog om vi inte kan specificera vad vi menar med *"litet"*.

Om vi tänker lite på det så inser vi är att vi måste kunna göra $|f(x)-a|$ hur *"litet som helst"*. Det räcker inte med att $|f(x)-a|$ är mindre än säg $\frac{1}{100}$ för i så fall skulle vi säga att $f(x) = x + \frac{1}{200}$ går mot 0 då x går mot noll - men vi vill definitivt att $\lim_{x\to 0}\left(x + \frac{1}{200}\right) = \frac{1}{200}$. På samma sätt så räcker det inte med att $|f(x)-a|$ är mindre än $\frac{1}{1000}$ eller 10^{-10}. Vi vill helt enkelt kunna göra $|f(x)-a|$ mindre än varje positivt tal ϵ genom att välja $|x-b|$ tillräckligt litet.

Hur litet ska vi välja $|x-b|$? Det måste bero på hur litet vi har valt ϵ. Så om vi väljer något $\epsilon > 0$ så ska vi kunna välja ett $\delta_\epsilon > 0$ så att om $|x-b| < \delta$ så är $|f(x)-a| < \epsilon$. Observera att detta säger bara det vi intuitivt tänker. Dvs att $f(x) \to a$ då $x \to b$ om $f(x)$ är tillräckligt nära a för varje x som är tillräckligt nära b. Men det säger det på ett väldigt precist sätt som vi kan använda för att utföra beräkningar. Så vi kan förlita oss på enkla beräkningsregler (för olikheter och absolutbelopp) för att avgöra om $f(x) \to a$.

Låt oss skriva ner definitionen för $f(x) \to a$ då $x \to b$.

Definition 2. *Vi säger att $f(x) \to a$ då $x \to b$ (eller att $f(x)$ går mot a när x går mot b eller att $\lim_{x\to b} f(x) = a$) om det för varje $\epsilon > 0$ existerar ett δ_ϵ så att*

$$|f(x)-a| < \epsilon \text{ för alla } x \text{ så att } |x-b| < \delta_\epsilon.$$

När vi har definierat $\lim_{x\to b} f(x) = a$ på det här sättet så förbinder vi oss att alltid använda $\lim_{x\to b} f(x) = a$ i exakt den betydelsen definitionen anger.

Låt oss beräkna ett exempel för att försäkra oss om att vi kan räkna med definitionen.

Exempel 4: *Visa att* $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+3x}{x} = 4$.

Svar: Vi ska visa att det för varje $\epsilon > 0$ existerar ett $\delta > 0$ så att

$$\left|\frac{x^2+3x}{x} - 4\right| < \epsilon \text{ för alla } x \text{ så att } |x-1| < \delta. \tag{10}$$

Här så har vi substituerat $b = 1$, $a = 4$ och $f(x) = \frac{x^2+3x}{x} = 4$ i definitionen för gränsvärde.

Observera att vi måste använda definitionen trots att vi "vet" att gränsvärdet stämmer. Senare i kursen, när vi definierat begreppet kontinuitet, så kommer vi att tillåta oss att direkt substituera $x = 1$ i uttrycket $\frac{x^2+3x}{x}$ och se att gränsvärdet är 4.

Om vi förkortar med x i det första absolutbeloppet i (10) ser vi att ekvation (10) är samma sak som

$$|x-1| < \epsilon \text{ för alla } x \text{ så att } |x-1| < \delta.$$

Men det är uppenbart att, givet $\epsilon > 0$, så existerar det ett $\delta > 0$ så att

$$|x-1| < \epsilon \text{ för alla } x \text{ så att } |x-1| < \delta,$$

vi kan ju ta $\delta = \epsilon$ (och ϵ existerar ju). Vi har därmed visat att definitionen är uppfylld och därmed att $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+3x}{x} = 4$. $\square$

Problem: *Om du behöver göra några egna beräkningar (rekommenderas) så visa följande:*

$$\textbf{a)} \quad x^2 + 3 \to 7 \text{ då } x \to -2 \quad \textbf{b)} \quad \frac{x^2+6x+8}{x+4} \to -2 \text{ då } x \to -4.$$

Det är lika viktigt att kunna bevisa att ett gränsvärde inte existerar som att visa att det existerar. Betrakta följande exempel.

Exempel 5: *Visa att* $\lim_{x\to 3} \frac{x^2+x-12}{x-3} \neq 1$.

Svar: Vi behöver visa att definitionen inte gäller. Eftersom definitionen säger att det för varje $\epsilon > 0$ måste finnas ett $\delta > 0$ så att

$$\left| \frac{x^2+x-12}{x-3} - 1 \right| < \epsilon \text{ för alla } x \text{ så att } |x-3| < \delta, \tag{11}$$

så räcker det med att hitta ett $\epsilon > 0$ så att inget δ som satisfierar (11).

Om vi förkortar $\frac{x^2+x-12}{x-3} = \frac{(x-3)(x+4)}{x-3} = x+4$ (för $x \neq 3$) så kan vi gissa att gränsvärdet är 7. Så om x är nära 3 så borde $\frac{x^2+x-12}{x-3} \approx 7$. Eftersom avståndet från 1 till 7 är större än 1 så borde vi kunna hitta en motsägelse för $\epsilon = 1$. (Här resonerar jag intuitivt och detta måste bevisas.)

Vi sätter därför upp en hypotes att det inte borde finnas något $\delta > 0$ så att

$$\left| \frac{x^2+1-12}{x+3} - 1 \right| < 1 \text{ för alla } x \text{ så att } |x-3| < \delta. \tag{12}$$

Om vi kan visa att (12) inte håller för något $\delta > 0$ så har vi bevisat att Definition 2 inte gäller med $f(x) = \frac{x^2+x-12}{x-3}$, $a = 1$ och $b = 3$ och således att $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-12}{x+2} \neq 1$.

Om vi använder $\frac{x^2+x-12}{x-3} = x+4$ för $x \neq 3$ i (12) så får vi

$$|x+3| < 1 \text{ för alla } x \text{ så att } |x-3| < \delta, \text{ och } x \neq 3. \tag{13}$$

Men $|x+3| < 1$ är samma sak som $-1 < x+3 < 1$ det vill säga $-4 < x < -2$. På samma sätt så är $|x-3| < \delta$ samma sak som $3-\delta < x < 3+\delta$. Därför så är (13) är ekvivalent med

$$-4 < x < -2 \text{ för alla } x \text{ så att } 3-\delta < x < 3+\delta, \text{ och } x \neq 3. \tag{14}$$

Vi kan skriva detta som

$$3-\delta < x < 3+\delta, \text{ och } x \neq 3 \text{ implicetar att } -4 < x < -2. \tag{15}$$

Kom ihåg att vi vill visa att (15) inte gäller för något $\delta > 0$. Observera att för varje $\delta > 0$ så är $x_\delta = 3 + \delta/2 \neq 3$ (eftersom $\delta > 0$) och $3-\delta < x_0 < 3+\delta$. Dessutom så gäller $x_\delta > 0$. Så hur vi än väljer $\delta > 0$ så finns det ett x_δ så att

1. $x_\delta \neq 3$,

2. $3 - \delta < x_\delta < 3 + \delta$,

3. $x_\delta > 0$ det vill säga $x_\delta > -2$.

Punkt 1 och 2 betyder att x_δ satisfierar villkoren i (15) men punkt 3 säger att slutsatsen inte gäller, och detta inte för något $\delta > 0$. Detta bevisar att $\lim_{x\to 3} \frac{x^2+x-12}{x-3} \neq 1$. □

Problem: *Visa att* $\lim_{x\to 6} \frac{x^2-3x-18}{x-6} \neq -2$.

Det sista vi ska säga om beräkning av gränsvärden är att på samma sätt som vi, för gränsvärden när $x \to \infty$, kunde antaga att C_ϵ var stort om det förenklade beräkningarna så kan vi antaga att δ är litet när vi beräknar gränsvärden då $x \to b$. Detta eftersom om vi vet att om

$$|x - b| < \delta \text{ implicerar att } |f(x) - a| < \epsilon \tag{16}$$

så kommer, för varje $\tilde{\delta} < \delta$, det att gälla

$$|x - b| < \tilde{\delta} \text{ implicerar att } |f(x) - a| < \epsilon. \tag{17}$$

Så när vi vill visa att δ existerar så är det inget problem att anta att δ är litet, säg mindre än 1, $\frac{1}{1000}$ eller 10^{-10}. Ofta så kan det underlätta beräkningarna att ha lite extra information om δ.

Låt oss beräkna ett sista exempel, det exemplet jag beräknade på föreläsningen.

Exempel 6: *Visa att* $\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-3)(x+2)}{x-1} = -6$.

Svar: Som tidigare så måste vi visa att definitionen gäller med $f(x) = \frac{(x-1)(x-3)(x+2)}{x-1}$, $a = -6$ och $b = 1$. Dvs. vi vill visa att det för varje $\epsilon > 0$ så existerar det ett δ_ϵ så att

$$\left|\frac{(x-1)(x-3)(x+2)}{x-1} - (-6)\right| < \epsilon \text{ för alla } x \text{ så att } |x - 1| < \delta_\epsilon.$$

I andra ord så ska vi visa att om någon ger oss ett $\epsilon > 0$, vilket tal som helst, så kan vi hitta ett δ så att

$$|x - 1| < \delta_\epsilon \text{ implicerar att } \left|\frac{(x-1)(x-3)(x+2)}{x-1} - (-6)\right| < \epsilon.$$

En förenkling av uttrycket ger, för $x \neq 1$,

$$\left|\frac{(x-1)(x-3)(x+2)}{x-1} - (-6)\right| = |x(x-1)| = |x||x-1|,$$

där vi använde lagarna för triangelolikheten i det sista steget.

Vi vill alltså hitta ett δ_ϵ då att

$$|x - 1| < \delta_\epsilon \text{ implicerar att } |x|\,|x - 1| < \epsilon. \tag{18}$$

Problemet är att $|x||x-1|$ är en lite knepig funktion så vi skulle vilja förenkla den. Mest för att vi är lata. Observera att vi skulle kunna använda definitionen för absolutbeloppet och skriva om

$$|x||x-1| = \begin{cases} x(x-1) & \text{om } x \geq 1 \\ -x(x-1) & \text{om } 0 \leq x < 1 \\ x(x-1) & \text{om } x < 0. \end{cases}$$

Men med den omskrivningen skulle vi behöva lösa 3 problem.

Istället så antar vi att $\delta_\epsilon \leq 1/2$. Som vi påpekade innan exemplet så kan vi alltid hitta ett $\delta_\epsilon \leq 1/2$ som uppfyller (18) om det finns något tal δ_ϵ som uppfyller (18). Då vi bara behöver hitta ett δ_ϵ så är det därför inget hinder att antaga att $\delta_\epsilon \leq 1/2$.

Om $\delta_\epsilon \leq 1/2$ och $|x-1| < \delta_\epsilon$ så

$$|x| = |x-1+1| \leq |x-1| + |1| < \delta_\epsilon + 1 \leq \frac{3}{2}$$

där vi använde triangelolikheten i första olikheten. Så om $\delta_\epsilon \leq 1/2$ och $|x-1| < \delta_\epsilon$ så kommer $|x||x-1| < \frac{3}{2}|x-1|$. Det räcker därför att visa att det för varje $\epsilon > 0$ så finns det ett $\delta_\epsilon > 0$ så att

$$|x-1| < \delta_\epsilon \text{ och } \delta_\epsilon \leq \frac{1}{2} \text{ implicerar att } \frac{3}{2}|x-1| < \epsilon. \tag{19}$$

Detta implicerar ekvation (18) eftersom $|x||x-1| < \frac{3}{2}|x-1|$, så om $\frac{3}{2}|x-1| < \epsilon$ så måste $|x|\,|x-1| < \epsilon$.

Men (19) är lätt att visa. Om vi väljer δ_ϵ som det minsta av $\frac{2\epsilon}{3}$ och $\frac{1}{2}$, dvs. $\delta_\epsilon = \min\left(\frac{2\epsilon}{3}, \frac{1}{2}\right) \leq \frac{2\epsilon}{3}$ så implicerar gäller det att

$$|x-1| < \delta_\epsilon \text{ implicerar att } \frac{3}{2}|x-1| < \frac{3}{2}\frac{2\epsilon}{3} < \epsilon.$$

Vi har därigenom för varje $\epsilon > 0$ hittat ett $\delta_\epsilon = \min\left(\frac{2\epsilon}{3}, \frac{1}{2}\right)$ så att

$$\left| \frac{(x-1)(x-3)}{x+2} x - 1 - (-6) \right| < \epsilon \text{ för alla } x \text{ så att } |x-1| < \delta_\epsilon.$$

Beviset är därigenom färdigt. □

Problem: *Visa följande:*

a) $\lim_{x \to 4} \frac{(x^2-3x-4)(x+2)}{x-4} = 30$

b) $\lim_{x \to -12} \frac{x^3+5x^2-92x-96}{x^2+9x-36} = -\frac{56}{3}$.

En sista kommentar. Det finns naturligtvis andra kombinationer av gränsvärden såsom till exempel $\lim_{x\to-\infty} f(x) = a$ eller $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$. Dessa definieras på liknande sätt och beräkningarna är liknande. Så om vi förstår de ovanstående två fallen av gränsvärden så kommer det att vara enkelt att förstå de andra typerna.