Inlämningsuppgift 2 SF1602 HT2014

A Efternamn, Förnamn: ________________________________ **Personnummer:** ____________________
Program: ________________

B Efternamn, Förnamn: ________________________________ **Personnummer:** ____________________
Program: ________________

C Efternamn, Förnamn: ________________________________ **Personnummer:** ____________________
Program: ________________

Fråga 1: Beräkna följande integral med ett maximalt fel på 10^{-2}:

$$\int_0^1 \sin(x)\left(\cos(x^2) - 1\right) dx,$$

ni måste bevisa att ert svar har maximalt fel 10^{-2}.

Ledtråd: *Du kan inte lösa integralen explicit! Istället så kan du approximaera* $\sin(x)$ *och* $\cos(x^2) - 1$ *med Maclaurinpolynom och skatta integralen.*

Fråga 2: Ange hur många termer du behöver[1] i dina Maclaurinexpansioner om du vill skatta integralen i fråga 1 med maximalt fel 10^{-k}. Det finns olika sätt att approximera integranden i fråga 1. Vilket sätt du använder spelar ingen roll så länge du kan bevisa ditt svar.

Fråga 3: [Eulers identitet.] Det flesta av er har hört att $\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ och $\sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ där $i^2 = -1$ är den imaginära enheten. Den här formeln är ganska mystisk - kanske rent utav otrolig. Det är inte alls uppenbart att det finns en relation mellan e^x och $\cos(x)$. I den här uppgiften skall ni bevisa att $\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$. Vi börjar med att definiera funktionen $E_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ för $n \in \mathbb{N}$ och $E(x) = \lim_{n\to\infty} E_n(x)$.

1. Bevisa att för varje $x \in \mathbb{R}$ det gäller att $\lim_{n\to\infty} E_n(x) = e^x$. D.v.s. $E(x)$ är väldefinierad och $E(x) = e^x$

   Ledtråd: *Vad är Maclaurinexpantionen för* e^x*?*

2. Eftersom $E(x) = e^x$ för alla reella tal så definierar vi $e^{x+iy} = \lim_{n\to\infty} E_n(x+iy) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(x+iy)^k}{k!}$ för alla komlexa tal $x + iy$ där $x, y \in \mathbb{R}$. Ni behöver inte visa att e^{x+iy} är väldefinierad (med den är väldefinierad - faktum är att ni inte behöver göra någonting i den här delfrågan).

3. Skriv ner ett uttryck för $\frac{E_n(ix)+E_n(-ix)}{2}$, först för $n = 1, 3, 5, 7$ och sen använd induktion för att skriva ner ett uttryck som gäller för ett allmänt $n > 0$.

4. Låt $p_n(x)$ vara Maclaurinpolynomet av ordning n till $\cos(x)$. Jämför ert uttryck för $\frac{E_n(ix)+E_n(-ix)}{2}$ med $p_n(x)$.

5. Bevisa att $\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} =\right) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{E_n(ix)+E_n(-ix)}{2} = \cos(x)$ för alla x.

6. I den allmänna lösningsformen för en homogen andra ordningens differential ekvation så ansätter man lösningen $ae^{\alpha_1 x} + be^{\alpha_2 x}$ om det karakteristiska polynomet har två olika reella rötter. Men man ansätter lösningen $ae^{\alpha x}\cos(\beta x) + be^{\alpha x}\sin(\beta x)$ om det karakteristiska polynomet har rötterna $\alpha \pm i\beta$. Använd Eulers identiteter för att förklara varför vi egentligen bara har en regel för vilken lösning man ska ansätta om det karakteristiska polynomet har två olika rötter.

Detta är ett grupparbete. En del av uppgiften är att förstå och förklara matematik och det är gruppens ansvar att alla i gruppen förstår svaren. Det är fritt att diskutera med vem som helst (andra studenter, övningsledare) om uppgiften. Men uppgiften skall skrivas av gruppen tillsammans. Att kopiera andra gruppers svar eller att olika grupper lämnar in samma svar är inte tillåtet och kommer att räknas som plagiat. Som tumregel kan man säga att ni får diskutera uppgiften med vem ni vill. Men när ni skriver den så skall gruppen sitta ensam och inte rådgöra med personer utanför gruppen.

Inlämningsuppgiften skall lämnas in Torsdagen den 18e December. I första hand till din övningsledare, men det går att lämna den i "svarta lådan" utanför studentexpeditionen på matematik institutionen.

Lycka Till!

[1] Du behöver inte ange det minsta antalet termer som behövs, du kan ange ett större antal.