Instruktioner inför KS 1 den 3e Oktober.

John Andersson johnan@kth.se

1 Vad KS 1 Omfattar: Den första kontrollskrivningen innefattar de elementära funktionerna (polynom, rationella funktioner, trigonometriska funktionerna och deras inverser, exponential och logaritm funktionerna) och deras räknelagar. Kontrollskrivningen kommer också att innefatta gränsvärden.

Du skall kunna allt matreal i Persson-Böiers kapitel 0-2 samt kunna beräkna motsvarande övningsuppgifter i övningsboken - se veckolapparna för vecka 36-39. **KSen kommer främst att kontrollera beräkningsfärdigheter. Så titta igenom dina gamla veckolappar och försäkra dig om att du kan beräkna talen.**

Varje vecka så har ni fått en lapp som specificerar vad ni ska kunna efter den veckan. Om ni har följt de lapparna så kan ni allt som behövs för att klara kontrollskrivningen (och mer därtill). Kontrollskrivningen testar bara upp till betyg D vilket gör att det inte kommer att komma frågor på svåra bevis.

Nedan följer en (väldigt lång) lista med de viktigaste sakerna inför kontrollskrivningen där de svårare kursmomenten från veckolapparna har tagits bort. Du kommer inte att efterfrågas att bevisa några satser på KSen.

1. Förstå absolutbeloppets definition, betydelse och hur man räknar med absolutbelopp (Sidan 43.)

2. Olikheter och hur man löser dem (sid 22-24)

3. Polynom och rationella funktioner (sid 47-70).

4. Triangelolikheten (Sats 1 sid 46)

5. Faktorsatsen och polynomdivision (Sats 2-3 sidan 53)

6. Förstått hur man beräknar geometriska summor (Sats 5 sid 58) och binomialsatsen (Sats 3 sidan 63).

7. Definition 1 sidan 37 (definition av funktionsbegreppet - observera att vi definierar funktioner abstrakt. Det finns tal att räkna på funktionsbegreppet (1.1-1.8) om det skulle behövas.)

8. $\epsilon - \delta-$definitionen (sid 136). Detta är den viktigaste definitionen i analysen och den ligger till grund för all matematisk analys.

9. Ha en grundläggande förståelse för vad ett matematiskt bevis är.

10. Förstå och kunna göra beräkningar med de trigonometriska funktionerna (additionsformler, omskrivning med hjälpvinkel etc.) etc. (se sidan 98-116)

11. Förstå och kunna göra beräkningar med logaritm, potens och exponentialfunktionerna. Du skall framförallt kunna tillämpa logaritm och exponential lagarna för beräkningar. (se sidan 78-86 och 70-78)

12. Kunna använda standardgränsvärden för logaritm, potens, trigonometriska och exponentialfunktioner.

13. Kunna rita enkla grafer med $\sin, \cos, \arcsin, \log, e^x$ etc. funktionerna.

14. Beräkna standardgränsvärden (Tex $\lim_{x\to\infty} \frac{2^x+x^4+\ln(x)}{e^{2x}+x^2\sin(x^3)}$ och liknande. Helst så skall du direkt kunna se att svaret på föregående gränsvärde är noll på ett par sekunder.)

15. Kunna använda Sats 1-5 sidan 140-141 i Persson-Böiers (Summa, produkt och kvotregeln, Sammansättningsregeln, instängningsregeln, regeln om gränsövergång i olikhet).

16. Fårstå definitionen av kontinuitet.

17. Kunna rita grafer med hjälp av definitionen av gränsvärde och asymptoter.

18. Ha en grundläggande förståelse för teorin om serier och kunna avgöra om enkla serier är konvergenta eller divergenta.

Kontrollskrivningens utformning. Kontrollskrivningen kommer att bestå av 4 frågor.

Fråga 1. Fråga 1 består av fyra kortfrågor av den typ som ni har fått på era veckolappar. Ni behöver inte motivera era svar. Vissa frågor kan vara Ja och Nej frågor, för andra kan ni behöva skissa en graf eller ge ett numeriskt värde, en funktion eller en mängd. Ange bara svaret utan motivering. Ni får 1 poäng per rätt svar

Fråga 2-3. Dessa frågor testar er räknekunskap. Ni behöver bara ange svaret utan motivering. 2 poäng per fråga.

Fråga 4. Fråga fyra testar också era räknekunskaper. Men ni måste fullständigt motivera era svar i fråga 4. Se nedan hur jag vill att ni svarar på fråga 4. Fråga 4 ger maximalt 4 poäng.

KSen ger maximalt 12 poäng. För godkänt krävs 8 poäng.

Föregående års KSar ligger på kurshemsidan (under examinations länken). Svårigheten är ungefär den samma men utformningen skiljer sig något. Jag har dragit ner något på konceptuell förståelse och ökat fokus lite på beräkningar på KSen.

Hur jag vill att du svarar. På fråga 1-3 så behöver du bara ange svar utan motivering. Men ditt svar i fråga 4 skall fullständigt motiveras. Låt mig ge ett exempel på hur jag vill att ni svarar.

Exempel Fråga: *Beräkna gränsvärdet* $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)+x^2}{x+1-\cos^2(x)}$.

Svar: Vi skriver om uttrycket

$$\frac{\sin(2x)+x^2}{x+1-\cos^2(x)} = \frac{\sin(2x)+x^2}{x+\sin^2(x)} = \frac{\frac{\sin(2x)}{x}+x}{1+\frac{\sin^2(x)}{x}}$$

där vi använde den trigonometriska ettan i den första likheten och förkortade med x i täljare och nämnare i den andra likheten.

Vi ämnar att använda kvotregeln och för att använda den så måste vi visa att gränsvärdet av nämnaren inte är noll. Vi beräknar därför

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\sin^2(x)}{x}\right) = \left\{\begin{array}{c}\text{summa}\\ \text{regeln}\end{array}\right\} = 1+\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)}{x}. \tag{1}$$

Det är ett standardgränsvärde att $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$ och att $\lim_{x\to 0}\sin(x) = 0$ (följer tex av kontinuitet). Vidare så vet vi, enligt sats, att om $f(x)\to 0$ och om $g(x)$ är begränsad så följer det att $\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = 0$. Efter som $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$ är konvergent så är $g(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ begränsad så det följer från sats att $\sin(x)g(x)\to 0$ då $x\to 0$. Använder vi detta i (1) så ser vi att nämnare uppfyller

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\sin^2(x)}{x}\right) = 1 \neq 0. \tag{2}$$

Vi får därför använda kvotregeln vilken ger oss

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin(2x)}{x}+x}{1+\frac{\sin^2(x)}{x}} = \left\{\begin{array}{c}\text{kvot}\\ \text{regeln}\end{array}\right\} = \frac{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(2x)}{x}+x\right)}{\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\sin^2(x)}{x}\right)} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{använd} \\ \text{ekv (2)} \end{array} \right\} = \frac{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(2x)}{x} + x\right)}{1} = \left\{ \begin{array}{l} \text{summa} \\ \text{regeln} \end{array} \right\} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x} + \lim_{x\to 0} x = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x},$$

där vi använde att $\lim_{x\to 0} x = 0$ i den sista likheten.

För att beräkna $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x}$ så använder vi följande substitution

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x} = \lim_{x\to 0} 2\frac{\sin(2x)}{2x} = \left\{ \begin{array}{l} \text{substituera} \\ y = 2x \end{array} \right\} = \lim_{y\to 0} 2\frac{\sin(y)}{y} = 2, \tag{3}$$

där vi använde ett standardgränsvärde i den sista likheten.

Vi har därför beräknat att $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)+x^2}{x+1-\cos^2(x)} = 2$ vilket är vårt svar. $\square$

Kommentarer till svaret. Jag vill att ni refererar till satser som motiverar era beräkningar. Vissa satser har namn som gör att de är lätta att referera till men andra saknar namn. Tex. så använder vi sats 1, sidan 140 i P-B, i vårt svar. Då den saknar namn så förklarar vi lite kort att vi använde ren sats (i det här fallet $f(x) \to 0$, $g(x)$ begränsad ger $f(x)g(x) \to 0$). Vi förklarar även (nästan) alla steg vi gör i ord.

Detta visar att vi har läst teorin och att vi förstår hur teorin används. Detta teoretiska medvetande visar också att vi förstår att vi räknar rätt.

Exakt vad och hur mycket man ska skriva i en lösning är dock lite av en smakfråga och det finns en viss risk att man blir pedantisk. Det gäller att hitta en balans som gör att man visar att man förstår teorin utan att skriva långa essäer om triviala ting.

Till exempel så använder vi i ovanstående lösning, i ekvation (1), att $\lim_{x\to 0} 1 = 1$ utan att motivera det - jag nämnde heller inte summaregeln i ekvation (1) vilket jag kanske borde ha gjort. Jag tyckte att det skulle vara lite väl pedantiskt att påpeka detta faktum. På samma sätt så kallar vi $\lim_{y\to 0} 2\frac{\sin(y)}{y} = 2$ för ett standardgränsvärde i ekvation (3). Kanske vore det bättre matematiskt att använda standardgränsvärdet $\lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1$, vilket vi har bevisat i en sats, tillsammans med produktregeln och att $\lim_{y\to 0} 2 = 2$ - men det kändes också för pedantiskt.

Jag kräver inte pedanteri i era lösningar. Men jag vill att ni motiverar era beräkningar på ungefär samma sätt som ovanstående beräkning. Ni ska visa att ni vet att era beräkningar står på en teoretisk grund och att ni bygger era resonemang på bevisade satser. Exakt hur mycket detaljer man måste skriva är en avvägningsfråga. Men om ni skulle lösa ovanstående tal utan att referera till summa, eller kvotregeln så kommer ni att få poängavdrag.