Kontrollskrivning 2 SF1602, 12e Nov. HT2014

Namn: ______________________________**Personnummer:**____________________

Program: ________________

Hjälpmedel: Papper, penna, suddgummi och annat kontorsmatreal. Miniräknare och formelsamling är **inte** tillåtna.
Totalt 12 poäng. För godkänt krävs 8 poäng.

Fråga 1: Gör följande uppgifter. Ingen motivering krävs! Inom parentes anges hur svaret skall anges.

a) Skissa grafen av en kontinuerlig funktion $f(x)$ definierad på $[0,3]$ så att $f(x)$ har en primitiv funktion $F(x)$ som uppfyller

$$F(x) \approx \begin{cases} \text{strängt växande om } x \in]0,1[\\ \text{strängt avtagande om} x \in]1,2[\\ = 3 \text{ om } x \in]2,3[. \end{cases}$$

[SVARA MED EN SKISS AV FUNKTIONEN $f(x)$'S GRAF.]

b) Skissa tre olika primitiva funktioner till $\sin(x)$ i samma graf. [SVARA MED TRE SKISSER I EN GRAF.]

c) Funktionen $f(x) = \frac{3x^2-14x+39}{(x^2-9)(x-3)}$ har partialbråksuppdelningen

$$f(x) = \frac{3}{x+3} + \frac{7}{(x-a)^k},$$

vad är a och vad är k? [ANGE a OCH k.]

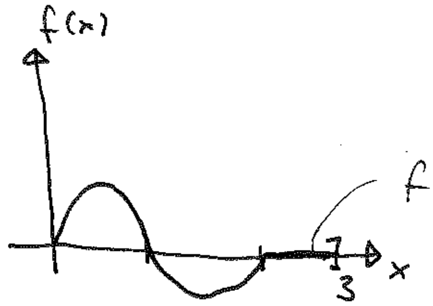
d) Antag att $f(x)$ och $g(x)$ är deriverbara funktioner på $[0,1]$. Ange ett uttryck för funktionen

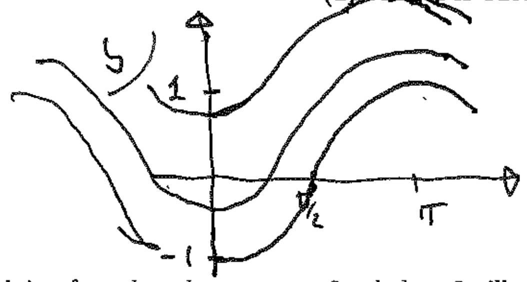
$$F(x) = \int f'(x)g(x)dx$$

som inte innehåller några derivator av $f(x)$. [ANGE ETT ALTERNATIVT UTTRYCK FÖR F.]

(1poäng per rätt svar.)

Svar: a)





c) Min plan var att man skulle känna igen partiabråksuppdelningsformeln och svara $a = 3$ och $k = 2$ vilket är det naturliga svaret...

Men, talet har ett skrivfel och sjuan måste vara en fyra om $a = 3$ och $k = 2$ ska gälla. Så det finns ingen lösning. Eftersom det är jag som har gjort fel så kommer båda svaren "$a = 3$ och $k = 2$" eller "Det finns inga a och k så att likheten gäller." att ge poäng. Jag är ledsen över förvirringen..

d) $F(x) = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$ (Detta är bara formeln för partiell integration.)

Fråga 2: Ange alla primitiva funktioner till $x^2\cos(2x^3-4)$.

[INGEN MOTIVERING KRÄVS - ANGE BARA DITT SVAR.] **(2poäng)**

Svar: $\frac{1}{6}\sin(2x^3-4)+C$ där C är en godtycklig konstant.

Fråga 3: Hitta alla primitiva funktioner till $f(x) = \frac{2x+4}{2x^2+x-21}$.

[INGEN MOTIVERING KRÄVS - ANGE BARA DITT SVAR.] **(2poäng)**

Svar: $\frac{10}{13}\ln|x-3| + \frac{3}{13}\ln|x+7/2| + C$ där C är en godtycklig konstant.

Fråga 4: Ange samtliga primitiva funktioner till $e^{3x}\ln(1+e^{2x})$.

[FULLSTÄNDIG MOTIVERING KRÄVS.] **(4poäng)**

Svar: Vi observerar att $e^{3x} = \frac{1}{3}\frac{de^{3x}}{dx}$ så

$$\int e^{3x}\ln(1+e^{2x})dx = \frac{1}{3}\int \frac{de^{3x}}{dx}\ln(1+e^{2x})dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{partiell} \\ \text{integration} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{e^{3x}\ln(1+e^{2x})}{3} - \frac{1}{3}\int e^{3x}\frac{d\ln(1+e^{2x})}{dx}dx = \frac{e^{3x}\ln(1+e^{2x})}{3} - \frac{1}{3}\int e^{3x}\frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}dx =$$

$$= \frac{e^{3x}\ln(1+e^{2x})}{3} - \frac{2}{3}\int \frac{e^{5x}}{1+e^{2x}}dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{subst. } e^x = y \\ e^x dx = dy \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{e^{3x}\ln(1+e^{2x})}{3} - \frac{2}{3}\int \frac{y^4}{1+y^2}dx. \tag{1}$$

För att beräkna $\int \frac{y^4}{1+y^2}dx$ så observerar vi att

$$\frac{y^4}{1+y^2} = y^2\frac{y^2+1-1}{1+y^2} = y^2 - \frac{y^2}{1+y^2} = y^2 - \frac{y^2+1-1}{1+y^2} = y^2 - 1 + \frac{1}{1+y^2}.$$

Vi kan således beräkna

$$\frac{2}{3}\int \frac{y^4}{1+y^2}dx = \frac{2}{3}\int \left(y^2 - 1 + \frac{1}{1+y^2}\right)dy = \frac{2}{9}y^3 - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}\arctan(y) + C, \tag{2}$$

där vi har använt standardintegraler för elementära funktioner i den sista likheten.

Om vi använder (2) i (1) så får vi, efter att ha åter återsubstituerat $e^x = y$,

$$\int e^{3x}\ln(1+e^{2x})dx = \frac{e^{3x}\ln(1+e^{2x})}{3} - \frac{2}{9}e^{3x} + \frac{2}{3}e^{x} - \frac{2}{3}\arctan(e^x) + C,$$

för någon konstant C.