Kontrollskrivning 3 SF1602, 15e Dec. HT2014

Namn: ________________________________**Personnummer:**____________________

Program: ________________

Hjälpmedel: Papper, penna, suddgummi och annat kontorsmatreal. Miniräknare och formelsamling är **inte** tillåtna.
Totalt 9 poäng. För godkänt krävs 6 poäng.

KS 3, Fråga 1: Gör följande uppgifter. Ingen motivering krävs! Inom parentes anges hur svaret skall anges.

a) Skissa e^x i intervallet $[0,1]$ och grafen av en trappfunktion $\chi(x)$ på $[0,1]$ så att $\chi(x)$ antar fyra olika värden och så att integralen av $\int_0^1 \chi(x)dx$ approximerar $\int_0^1 e^x dx$. [Svara med två tydliga grafer i samma diagram.]

b) Hur många kontinuerliga funktioner $f(x)$ definierade på $[-1,2]$ så att $f(x) \leq 2$ för alla $x \in [-1,2]$ och $\int_{-1}^2 f(x)dx = 6$ existerar. [Svara med ett tal, "oändligt många" eller med "omöjligt att avgöra".]

c) Om $f(x) = x\ln(1+\sin^7(x))$ så är $f'(x) = \ln(1+\sin^7(x)) + \frac{7x\cos(x)\sin^6(x)}{1+\sin^7(x)}$. Vad är

$$\int_0^{\pi/2} \left(\ln(1+\sin^7(x)) + \frac{7x\cos(x)\sin^6(x)}{1+\sin^7(x)} \right) dx?$$

[Svara med integralens värde eller "omöjligt att avgöra".]

(1poäng per rätt svar.)

Svar:
a)

b) 1.
c) $\frac{\pi}{2}\ln(2)$

Rättningsmall: 1 poäng per rätt svar. 0 poäng för fel svar.

KS 3, Fråga 2: Låt $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{om } x \leq 2 \\ 2x\ln(x) & \text{om } x > 2. \end{cases}$ Beräkna integralen $\int_0^4 f(x)dx$.

[Ingen motivering krävs - ange bara ditt svar.] **(2poäng)**

Svar: $28\ln(2)$

Rättningsmall: 2poäng för rätt 0poäng för fel svar.

KS 3, Fråga 3: Beräkna $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos^2(x)+4}}dx$.

[Fullständig motivering krävs.] **(4poäng)**

Svar: Vi börjar med att observera att eftersom nämnaren i integranden aldrig är lika med noll så är integranden kontinuerlig då den är sammansatt av kontinuerliga funktioner. Integralen är därför väldefinierad (precis som alla integraler av kontinuerliga funktioner på slutna begränsade intervall).

Vi gör variabelsubstitutionen $t = \cos(x)$. Eftersom $\cos(x)$ är monoton på $[0,\pi/2]$ så är substitutionen ett till ett. Vi beräknar $dt = \frac{d\cos(x)}{dx}dx = -\sin(x)dx$ och $x = 0 \Rightarrow t = 1$ och $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$. Vi får således

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos^2(x)+4}}dx = -\int_1^0 \frac{1}{\sqrt{t^2+4}}dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(t/2)^2+1}}dt,$$

där vi bytte integrationsordningen i det sista steget och bröt ut två ur kvadratroten. För att återföra integralen på standardformen så substituerar vi $s = t/2$, och får därigenom $ds = \frac{1}{2}dt$ och integrationsintervallet $s \in [0, 1/2]$. Således

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(t/2)^2+1}}dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}ds.$$

Detta är en integral på standardform och vi gör substitutionen $z = s + \sqrt{s^2+1}$. Detta leder till

$$z - s = \sqrt{s^2+1} \Rightarrow z^2 - 2sz + s^2 = s^2 + 1 \Rightarrow \frac{z^2-1}{2z} = s \Rightarrow \frac{z^2+1}{2z^2}dz = ds. \tag{1}$$

Vidare så är $z = 1$ då $s = 0$ och $z = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ då $s = \frac{1}{2}$. Slutgiltligen så beräknar vas integranden är uttryckt i z:

$$\sqrt{s^2+1} = z - s = z - \frac{z^2-1}{2z} = \frac{z^2+1}{2z} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{s^2+1}} = \frac{2z}{z^2+1},$$

då vi använde uttrycket för s som vi härledde i (1) i den andra likheten.

Vi får således

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}ds = \int_1^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \frac{2z}{z^2+1}\frac{z^2+1}{2z^2}dz = \int_1^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \frac{1}{z}dz =$$
$$= \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \ln(1) = \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right),$$

där vi använde insättningsformeln och standardintegralen $\int \frac{1}{z}dz = \ln(|z|) + C$.

Vårt **svar** är således $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos^2(x)+4}}dx = \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Rättningsmall:

1. Om inga motiveringar ges -2 poäng. Om motiveringarna är dåliga -1 poäng.
2. Ett enkelt räknefel skall inte bestraffas. Flera småfel -1 poäng.
3. -1 poäng för att använda byte av variabler fel.
4. Vissa studenter kan känna igen $\int \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}ds$ som en standardintegral. Detta skall inte bestraffas, om det görs rätt, eftersom jag har svårt att motivera varför man skall minnas integralen av vissa funktioner men inte av andra. Dock så skall det bestraffas om -1 eller -2 poäng om en student skulle minnas fel - vi måste försöka få dem att lära sig härleda uttryck.

Kontrollskrivning 4 SF1602, 15e Dec. HT2014

Totalt 8 poäng. För godkänt krävs 5 poäng.

KS 4, Fråga 1: Lös följande differentialekvation för $x \in [1/2, 3/2]$:

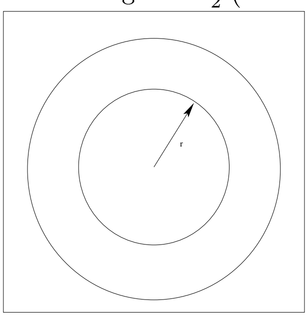
$$x^2 y\frac{dy}{dx} = 2 + 3x^2 \quad \text{och } y(1) = \pi.$$

[Ingen motivering krävs.] **(2poäng)**

Svar: $y(x) = \sqrt{6x - \frac{4}{x} + \pi^2 - 2}$

Rättningsmall: Om lösningen ser galen ut 0 poäng. Om lösningen väsentligen är rätt så 1 poäng. Om lösningen innehåller en godtycklig konstant men ser rimlig ut för övrigt 1 poäng.

KS 4, Fråga 2: Genom ett rör med radien 2meter strömmar vatten. Vattnets hastighet i en punkt r meter från rörets axel har hastigheten $\frac{3}{2}\left(4 - r^2\right)$ meter per sekund. Hur många m^3 vatten strömmar genom röret per sekund?



[INGEN MOTIVERING KRÄVS.] **(2poäng)**

Svar: 12π kubikmeter per sekund.

Rättningsmall: Helt rätt svar 2poäng. 1poäng för att svara 12 (utan π). Inget straff för att glömma enheten (vi sysslar inte med fysik!).

KS 4, Fråga 3: Lös följande differentialekvation

$$\begin{array}{ll} y''(x) + 2y'(x) - 8y(x) = \sin(2x) & \text{för } x \geq 0 \\ y(0) = y'(0) = 0. & \end{array}$$

[FULLSTÄNDIG MOTIVERING KRÄVS.] **(4poäng)**

Svar: Vi börjar med att hitta den homogena lösningen. Differentialekvationen har det karakteristiska polynomet $r^2 + 2r - 8$. Polynomet har rötterna $r = -1 \pm \sqrt{9}$ så vi får den homogena lösningen

$$y_h(x) = ae^{-4x} + be^{2x},$$

för godtyckliga konstanter $a, b \in \mathbb{R}$.

För att hitta partikulärlösningen så ansätter vi att $y_p(x) = c\cos(2x) + d\sin(2x)$. Om vi stoppar in $y_p(x)$ i diff ekvationen så fr vi

$$(-4c + 4d - 8c)\cos(2x) + (-4d - 4c - 8d)\sin(2x) = \sin(2x).$$

Detta ger upphov till det linjära ekvationssystemet

$$\begin{bmatrix} -12 & 4 \\ -4 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow c = -\frac{1}{40} \text{ och } d = -\frac{3}{40}.$$

Lösningen är alltså på formen

$$y(x) = ae^{-4x} + be^{2x} - \frac{1}{40}\cos(2x) - \frac{3}{40}\sin(2x).$$

För att hitta a och b så använder vi initialdata.

$$y(0) = 0 \Rightarrow a + b - \frac{1}{40} = 0$$

$$y'(0) = 0 \Rightarrow -4a + 2b - \frac{6}{40} = 0.$$

Detta ger ekvationssystemet

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{40} \\ \frac{3}{20} \end{bmatrix} \Rightarrow a = -\frac{1}{60} \text{ och } b = \frac{1}{24}.$$

Således är

$$y(x) = -\frac{1}{60}e^{-4x} + \frac{1}{24}e^{2x} - \frac{1}{40}\cos(2x) - \frac{3}{40}\sin(2x)$$

vår lösning.

Rättningsmall:

1. Om inga motiveringar ges -2 poäng. Om motiveringarna är dåliga -1 poäng.
2. Ett enkelt räknefel skall inte bestraffas. Flera småfel -1 poäng.
3. Att hitta partikulärlösningen skall ge 2poäng.
4. Att hitta den homogena lösningen skall ge 2poäng.