October 6, 2014

Antag att $f(x)$ är kontinuerlig i en punkt x^0. Följer det att f är deriverbar i x^0?

Om $f \geq g$ följer det att $f' \geq g'$?

Antag att $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, $f(x_0) = h(x_0)$, $f'(x_0)$ och $h'(x_0)$ existerar. Kan vi dra slutsatsen att $g'(x_0)$ existerar?

Om $f'(x) > g'(x)$ för alla x följer det att $f(x) > g(x)$?

Sats om derivata i extrempunkter.

Sats

Om funktionen $f(x)$ har ett lokalt extremvärde i en inre punkt x_0 av definitionsmängden och om $f(x)$ är deriverbar i x_0 så

$$f'(x_0) = 0.$$

1. Vad säger satsen?
2. Varför är den viktig?
3. Vilka antaganden gör vi? Är de nödvändiga?
4. Är satsen rimlig? Hur bevisas den?

Exempel.

Tal

Låt $f(x) = (x^2 - 2)e^{x^2}$ *vara definierad på* $[-2, 3]$. *Hitta maximala värdet av* f *på* $[-2, 3]$*?*

1. Vad ska vi göra?
2. Vad vet vi om max/min värden (d.v.s. extremvärden)?
3. Det räcker alltså att hitta punkterna där $f'(x) = 0$... Och kolla $x = -2$ och $x = 3$ då dessa inte är inre punkter.

Ett till exempel - fast omvänt.

Tal

Använd Maclaurinpolynom för att beräkna $\sin\left(\frac{1}{5}\right)$ *med tre siffrors noggrannhet.*

Kan du lösa talet?

Varför inte?

Definition

Låt $f(x)$ vara n gånger kontinuerligt deriverbar i $x = 0$. Då säger vi att

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^n(0)}{n}x^n$$

är Maclaurinpolynomet av ordning n till $f(x)$.

Exempel: Maclaurinpolynomet av ordning 4 till $\sin(x)$ är

$$\sin(0) + \frac{\cos(0)}{1}x + \frac{-\sin(0)}{2}x^2 + \frac{-\cos(0)}{6}x^3 + \frac{\sin(0)}{24}x^4 =$$

$$= x - \frac{x^3}{6}.$$

Vad gör vi nu?

Kan vi lösa talet?

Vi behöver en sats som talar om hur man räknar på talet!!!

Så gå tillbaka till boken och leta efter en sats som säger något om hur man räknar med Maclaurinpolynom.

Sats

Låt $f(x)$ vara $n+1$ gånger kontinuerligt deriverbar på $[-1,1]$ och $p_n(x)$ vara Maclaurinpolynomet av ordning n till $f(x)$. Då

$$f(x) = p_n(x) + R(x)$$

där $|R(x)| \leq \frac{\sup_{[0,x]} |f^{n+1}|}{(n+1)!} |x|^{n+1}$.

Varför är satsen viktig?

Kan den hjälpa oss att lösa talet?

Satsen säger att $|f(x) - p_n(x)| \leq |R(x)| \leq \frac{\sup_{[0,x]} |f^{n+1}|}{(n+1)!} |x|^{n+1}$.