November 19, 2014

Fråga 1.

Om $f(x)$ är begränsad kommer $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ att vara kontinuerlig? Deriverbar?

Fråga 1.

Om $f(x)$ är begränsad kommer $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ att vara kontinuerlig? Deriverbar?

Röd: Ja, både kontinuerlig och deriverbar.

Grön: Endast kontinuerlig.

Gul: Endast deriverbar.

Fråga 2.

Antag att $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -1$ och $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$ för någon integrerbar funktion $f(x)$ definierad på $[0, 2]$.

Vad är $\lim_{\epsilon \to 0} \int_{1-\epsilon}^{1+\epsilon} f(x) dx$?

Fråga 2.

Antag att $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -1$ och $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$ för någon integrerbar funktion $f(x)$ definierad på $[0, 2]$. Vad är $\lim_{\epsilon\to 0} \int_{1-\epsilon}^{1+\epsilon} f(x)dx$?

Röd: 2 eftersom $\lim_{x\to 1^+} f(x) - \lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$.

Grön: Noll, eftersom $\lim_{x\to 1^+} f(x) + \lim_{x\to 1^-} f(x) = 0$.

Gul: Noll av någon annan anledning.

Fråga 3.

Vad är $\lim_{x\to\infty}\int_x^{x+1} e^{\frac{t^2-1}{t^2}}\,dt$?

Fråga 3.

Vad är $\lim_{x\to\infty} \int_x^{x+1} e^{\frac{t^2-1}{t^2}}\, dt$?

Röd: Den naturliga konstanten $e \approx 2.71...$

Grön: Gränsvärdet är divergent.

Gul: Omöjligt att avgöra.

Fråga 4.

Om $f(x)$ är kontinuerlig på $[0, \infty]$ kommer då $\int_0^\infty f(x)dx$ att existera?

Kommer, för varje tal $a, b \in \mathbb{R}$, $b > a \geq 0$, $\int_a^b f(x)dx$ att existera?

Fråga 4.

Om $f(x)$ är kontinuerlig på $[0, \infty]$ kommer då $\int_0^\infty f(x)dx$ att existera?

Kommer, för varje tal $a, b \in \mathbb{R}$, $b > a \geq 0$, $\int_a^b f(x)dx$ att existera?

Röd: Det beror på vad $f(x)$ är.

Grön: $f(x)$ är integrerbar på $[a, b]$ men inte på $[0, \infty]$.

Gul: $f(x)$ är definitivt integrerbar på $[a, b]$. På $[0, \infty]$ beror integralens existens på vilken funktion $f(x)$ är.

Fråga 5.

Om $f(x)$ är integrerbar och begränsad på $[-5, 5]$ finns det då ett tal c så att $10c = \int_{-5}^{5} f(x)dx$?

Finns det ett $x_c \in [-5, 5]$ så att $f(x_c) = c$?

Fråga 5.

Om $f(x)$ är integrerbar och begränsad på $[-5, 5]$ finns det då ett tal c så att $10c = \int_{-5}^{5} f(x)dx$?
Finns det ett $x_c \in [-5, 5]$ så att $f(x_c) = c$?

Röd: c finns alltid men inte nödvändigtvis x_c.

Grön: Varken c eller x_c existerar nödvändigtvis.

Gul: x_c existerar, men c existerar inte nödvändigtvis.

Fråga 6. [Analysens Huvudsats.]

Sats

Antag att

1. $f(x)$ *är kontinuerlig på* $[a, b]$
2. $f(x)$ *är deriverbar på* $[a, b]$

då kommer $S(x) = \int_a^x f(t)dt$ *att vara deriverbar på* $]a, b[$ *med derivatan* $S'(x) = f(x)$

Vilket/vilka antaganden behövs inte?

Fråga 6. [Analysens Huvudsats.]

Sats

Antag att

1. $f(x)$ *är kontinuerlig på* $[a, b]$
2. $f(x)$ *är deriverbar på* $[a, b]$

då kommer $S(x) = \int_a^x f(t)dt$ *att vara deriverbar på* $]a, b[$ *med derivatan* $S'(x) = f(x)$

Vilket/vilka antaganden behövs inte?

Röd: $f(x)$ är kontinuerlig.

Grön: $f(x)$ är deriverbar.

Gul: Inget antagande behövs.

Fråga 7.

För vilka integrerbara funktioner $f(x)$ gäller

$$\left|\int_{-3}^{4} f(x)dx\right| = \int_{-3}^{4} |f(x)|dx?$$

Fråga 7.

För vilka integrerbara funktioner $f(x)$ gäller

$$\left|\int_{-3}^{4} f(x)dx\right| = \int_{-3}^{4} |f(x)|dx?$$

Röd: För alla funktioner $f(x) \geq 0$.

Grön: För de funktioner $f(x)$ så att $|f(x)|$ är kontinuerlig.

Gul: För alla funktioner $f(x)$ som inte byter tecken.

Fråga 8.

Antag att $f(x)$ och $g(x) \geq 0$ är deriverbara på $[0, \infty]$,

vad är $D_x \int_0^{g(x)} f(t)dt$?

Kan vi försvaga något antagande och dra samma slutsats?

Fråga 8.

Antag att $f(x)$ och $g(x) \geq 0$ är deriverbara på $[0, \infty]$, vad är $D_x \int_0^{g(x)} f(t)dt$?

Kan vi försvaga något antagande och dra samma slutsats?

Röd: $g'(x)f(g(x))$, funktionen $f(x)$ behöver endast vara kontinuerlig.

Grön: $g'(x)f'(g(x))$, alla antaganden behövs.

Gul: Det är omöjligt att avgöra vad $D_x \int_0^{g(x)} f(t)dt$ är utan vidare information om f och g.

Fråga 9.

Om $f(1) = -1$ och $\int_1^5 f'(x)dx = 2$ vad är $f(5)$?

Fråga 9.

Om $f(1) = -1$ och $\int_1^5 f'(x)dx = 2$ vad är $f(5)$?

Röd: $f(5) = 3$.

Grön: $f(5) = 1 + C$, där C är en godtycklig konstant.

Gul: Man måste veta vad $f(x)$ är innan man kan avgöra vad $f(5)$ är. Tex om $f(x) = x^2$ så är $f(5) = 25$.

Fråga 10.

Om $f(x)$ är en kontinuerlig funktion på $\mathbb{R}$ så att $f(x) \leq 10$ kommer då $\int_{-2}^{1} f(x)dx \leq 30$? Kommer $\int_{-2}^{1} f^2(x)dx \leq 300$?

Fråga 10.

Om $f(x)$ är en kontinuerlig funktion på $\mathbb{R}$ så att $f(x) \leq 10$ kommer då $\int_{-2}^{1} f(x)dx \leq 30$? Kommer $\int_{-2}^{1} f^2(x)dx \leq 300$?

Röd: Ja, $\int_{-2}^{1} f(x)dx \leq 30$ och $\int_{-2}^{1} f^2(x)dx \leq 300$.

Grön: Nej inget av påståendena gäller.

Gul: $\int_{-2}^{1} f(x)dx \leq 30$ men det gäller inte nödvändigtvis att $\int_{-2}^{1} f^2(x)dx \leq 300$.

Fråga 11.

Om $f(x)$ är en kontinuerlig funktion på $]0, \infty[$ så att

$$|f(x)| \leq |x|^{\alpha} \text{ för alla } x > 0.$$

För vilka värden på $a > 0$ och α kommer $\int_a^{\infty} |f(x)|^2 dx$ garanterat att vara konvergent?

Fråga 11.

Om $f(x)$ är en kontinuerlig funktion på $]0, \infty[$ så att

$$|f(x)| \leq |x|^{\alpha} \text{ för alla } x > 0.$$

För vilka värden på $a > 0$ och α kommer $\int_a^{\infty} |f(x)|^2 dx$ garanterat att vara konvergent?

Röd: $\alpha < 1$ och för alla $a > 0$

Grön: $\alpha < -\frac{1}{2}$ och för alla $a > 0$.

Gul: för alla α och a så att $\alpha \leq \ln(a)$.

Fråga 12.

Antag att $f(x)$ är kontinuerlig på $[0, 1]$ och att den generaliserade integralen $\int_0^1 \frac{|f(x)|}{x} dx$ konvergerar. Kommer då $\int_0^1 \frac{|f(x)|^2}{x} dx$ att konvergera?

Fråga 12.

Antag att $f(x)$ är kontinuerlig på $[0,1]$ och att den generaliserade integralen $\int_0^1 \frac{|f(x)|}{x}dx$ konvergerar. Kommer då $\int_0^1 \frac{|f(x)|^2}{x}dx$ att konvergera?

Röd: Ja!

Grön: Nej!

Gul: Det beror på vad $f(x)$ är.

Fråga 13.

Rotationsvolymen som fås när området mellan grafen av den kontinuerliga funktionen $f(x)$, $a \leq x \leq b$ roteras kring $x-$axeln är noll. Vad är $f(x)$?

Fråga 13.

Rotationsvolymen som fås när området mellan grafen av den kontinuerliga funktionen $f(x)$, $a \leq x \leq b$ roteras kring $x-$axeln är noll. Vad är $f(x)$?

Röd: $f(x) = 0$ för alla x.

Grön: $f(x) = 0$ förutom i ändligt många punkter där f är godtycklig.

Gul: Omöjligt att avgöra.

Fråga 14.

Finns det någon rotationssymmetrisk kropp given av en begränsad och deriverbar funktion $f(x)$ på $[0, \infty[$ så att kroppens volym är oändlig men dess yta ändlig?

LEDTRÅD: *Eftersom* $f'(x)^2 \geq 0$ *så kommer* $\sqrt{1 + f'(x)^2} \geq 1$.

Fråga 14.

Finns det någon rotationssymmetrisk kropp given av en begränsad och deriverbar funktion $f(x)$ på $[0, \infty[$ så att kroppens volym är oändlig men dess yta ändlig?

LEDTRÅD: *Eftersom* $f'(x)^2 \geq 0$ *så kommer* $\sqrt{1 + f'(x)^2} \geq 1$.

Röd: Ja!

Grön: Nej!

Herr Slasktratt ordinerar Differentialekvationer för nästa vecka!