

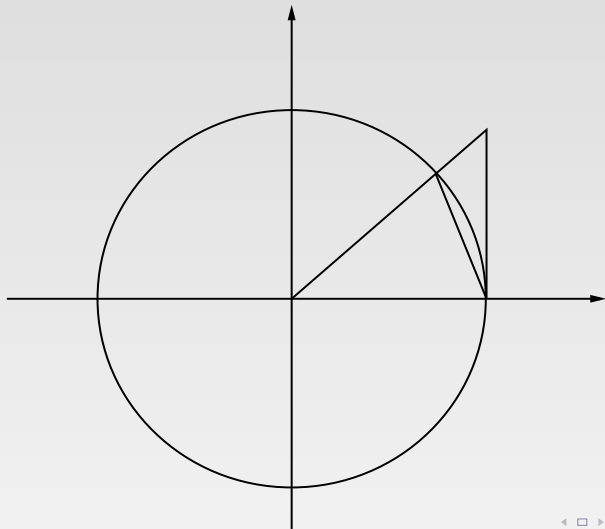
December 14, 2014

# Fråga 1.

Hur visar man att  $\sin(x) \leq x \leq \tan(x)$ ?

## Fråga 1.

Hur visar man att  $\sin(x) \leq x \leq \tan(x)$ ?



## Fråga 2.

Hur visar man att  $a > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty$ ?

## Fråga 2.

Hur visar man att  $a > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty$ ?

**Röd:** Det är ett standardgränsvärde och behöver inte bevisas.

**Gul:** Man använder binomialsatsen.

**Grön:** Genom att skissa en graf.

## Fråga 2.

Hur visar man att  $a > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty$ ?

**Röd:** Det är ett standardgränsvärde och behöver inte bevisas.

**Gul:** Man använder binomialsatsen.

**Grön:** Genom att skissa en graf.

LEDTRÅD: *Man skriver  $a = 1 + \lambda$  för något  $\lambda > 0$ .*

## Fråga 3.

Förklara för personen som sitter bredvid dig varför

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

## Fråga 3.

Förklara för personen som sitter bredvid dig varför

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

### Definition

*Vi säger att  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$  om det för varje  $\epsilon > 0$  existerar ett  $C_\epsilon > 0$  så att*

$$x > C_\epsilon \Rightarrow |f(x)| < \epsilon.$$



## Fråga 4. Lika enkelt som plus och minus!

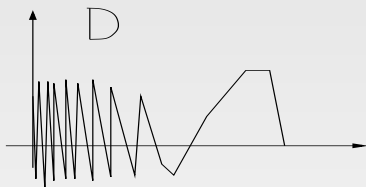
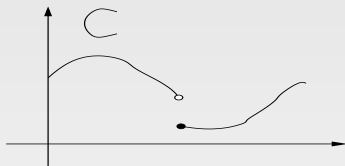
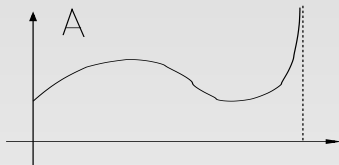
Förklara för personen bredvid dig hur man genom att lära sig några enkla satser (summa, produkt, kvotregeln) och några standardgränsvärden kan göra det lika enkelt att beräkna

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3(x) + 4x^6}{\sin(x)(1 - \cos(x)) + \pi x^7}$$

som att räkna plus och minus.

## Fråga 5.

Vilka av följande grafer är kontinuerliga?



**Röd:** A, B, D

**Gul:** A, B

**Grön:** Endast B.

## Fråga 6.

Hur vad säger satsen om mellanliggande värden?

## Fråga 6.

Hur vad säger satsen om mellanliggande värden?

**Röd:** Att om  $f(x)$  är kontinuerlig så antar  $f(x)$  alla värden i  $V_f$ .

**Gul:** Om  $f(x)$  är kontinuerlig så antar  $f(x)$  alla värden i mellan sitt max och min-värde.

**Grön:** Om  $f(x)$  är kontinuerlig på ett intervall  $]a, b[$  och  $x, y \in ]a, b[$  så antar  $f(x)$  alla värden mellan  $f(x)$  och  $f(y)$

## Fråga 6.

Hur vad säger satsen om mellanliggande värden?

**Röd:** Att om  $f(x)$  är kontinuerlig så antar  $f(x)$  alla värden i  $V_f$ .

**Gul:** Om  $f(x)$  är kontinuerlig så antar  $f(x)$  alla värden i mellan sitt max och min-värde.

**Grön:** Om  $f(x)$  är kontinuerlig på ett intervall  $]a, b[$  och  $x, y \in ]a, b[$  så antar  $f(x)$  alla värden mellan  $f(x)$  och  $f(y)$

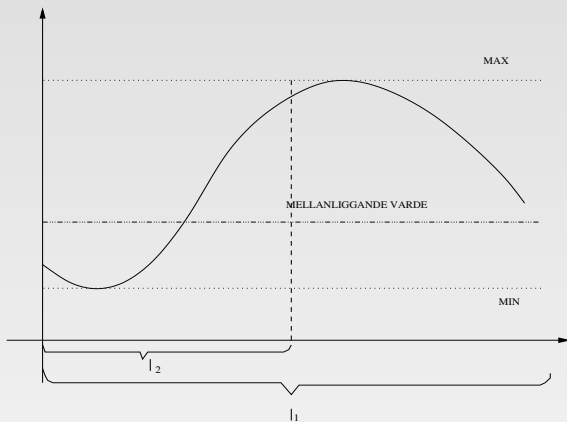
Vad är felet med Röd och gul?

## Fråga 7.

Hur bevisas satsen om mellanliggande värden?

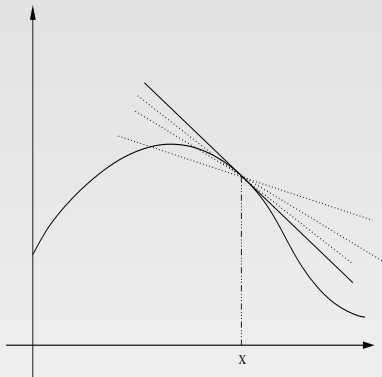
## Fråga 7.

Hur bevisas satsen om mellanliggande värden?



## Fråga 8.

Vad är derivatans geometriska betydelse? Förklara för någon.





## Fråga 9.

Förklara för någon, tex bredvidvarande person, vad derivatan har att göra med en funktions förändring.

## Fråga 9.

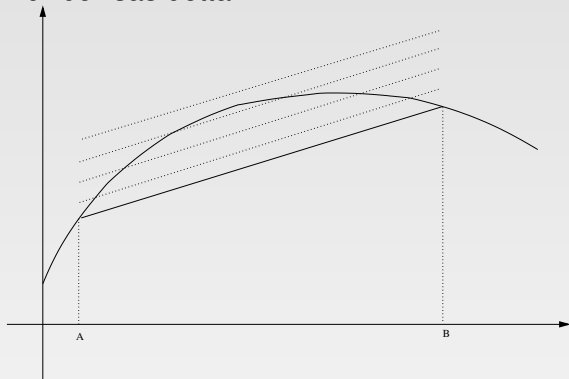
Förklara för någon, tex bredvidvarande person,  
vad derivatan har att göra med en funktions förändring.

Hur bevisas detta?

## Fråga 9.

Förklara för någon, tex bredvidvarande person, vad derivatan har att göra med en funktions förändring.

Hur bevisas detta?



## Fråga 10.

Exakt vilka räkneregler använder du för att beräkna

$$\frac{d \tan(\ln(x^2))}{dx} ?$$

## Fråga 10.

Exakt vilka räkneregler använder du för att beräkna

$$\frac{d \tan(\ln(x^2))}{dx} ?$$

**Röd:** Kedjeregeln, produktregeln, samt elementära derivator.

**Gul:** Derivatans för sinus, cosinus, kedjeregeln (två gånger), produktregeln samt derivatan för  $x$ .

**Grön:** Kedjeregeln (två gånger), kvotregeln, derivatan av sinus och cosinus, elementära derivatan för  $e^x$ , regeln för derivering av en invers funktion, produktregeln samt derivatan av  $x$ .

## Fråga 10.

Exakt vilka räkneregler använder du för att beräkna

$$\frac{d \tan(\ln(x^2))}{dx} ?$$

**Röd:** Kedjeregeln, produktregeln, samt elementära derivator.

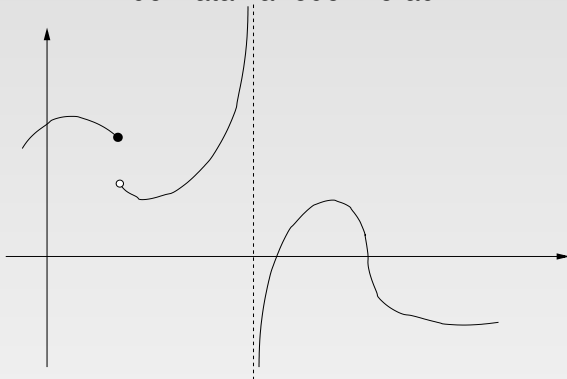
**Gul:** Derivatans för sinus, cosinus, kedjeregeln (två gånger), produktregeln samt derivatan för  $x$ .

**Grön:** Kedjeregeln (två gånger), kvotregeln, derivatan av sinus och cosinus, elementära derivatan för  $e^x$ , regeln för derivering av en invers funktion, produktregeln samt derivatan av  $x$ .

Verifiera när och hur du använder alla regler. Kan du bevisa dem?

## Fråga 11.

Gör en skiss av derivatan till följande funktion och markera när derivatan är odefinierad.



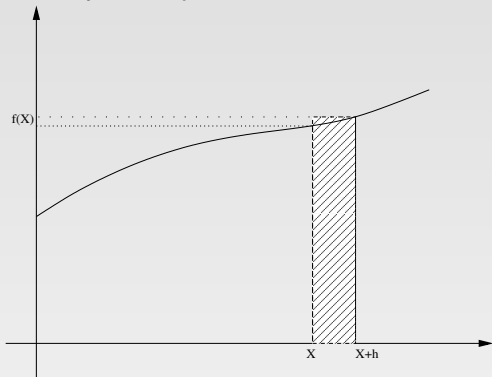
## Fråga 12.

Vi lär oss att  $\int_0^1 \sin(x) dx = -\cos(1) + \cos(0)$ . Men vad har det med arean under grafen av  $\sin(x)$  att göra? Förklara för personen som sitter bredvid dig.



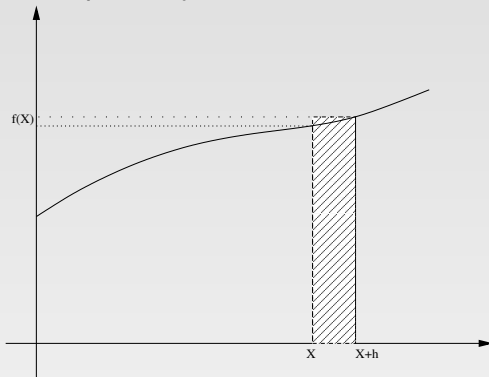
## Fråga 13.

Kan ni använda följande bild, eller på annat sätt minnas beviset på analysens huvudsats?



## Fråga 13.

Kan ni använda följande bild, eller på annat sätt minnas beviset på analysens huvudsats?



Vilka andra satser använde ni i ert bevis?

## Fråga 14.

Vilka räkneregler skulle ni använda för att beräkna

$$\int_2^4 \frac{\ln(2x)x}{(x^2 + 2)^3} dx?$$

## Fråga 14.

Vilka räkneregler skulle ni använda för att beräkna

$$\int_2^4 \frac{\ln(2x)x}{(x^2 + 2)^3} dx?$$

**Röd:** Göra en variabelsubstitution för att bli av med logaritmen och sen partialbråksuppdelning.

**Gul:** Integralen är olöslig med de metoder vi har lärt oss så vi måste approximera med en Taylorserie i  $x_0 = 3$ .

**Grön:** Vi försöker skriva integranden som en derivata gånger  $\ln(2x)$ , gör en partiell integration och sen partiellbråksuppdelning.

## Fråga 15.

Vilken är den rätta formen att ansätta för att partialbråksuppdelna

$$\frac{x^3 + 2x^2 - 3}{(x^2 + 3)^2(x - 3)^2}?$$

## Fråga 15.

Vilken är den rätta formen att ansätta för att partialbråksuppdelna

$$\frac{x^3 + 2x^2 - 3}{(x^2 + 3)^2(x - 3)^2}?$$

**Röd:**

$$\frac{ax + b}{(x^2 + 3)^2} + \frac{cx + d}{x^2 + 3} + \frac{e}{(x - 3)^2} + \frac{f}{x - 3}$$

**Gul:**

$$\frac{ax + b}{(x^2 + 3)^2} + \frac{cx + d}{(x - 3)^2}$$

**Grön:**

$$\left( \frac{ax + b}{(x^2 + 3)} + \frac{c}{x - 3} \right)^2.$$

## Fråga 16.

Vad är det för fel med följande beräkning:

$$\int_{-1}^2 \frac{1}{x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{insättnings} \\ \text{formeln} \end{array} \right\} =$$
$$= \ln(|2|) - \ln(|-1|) = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2).$$

## Fråga 17.

Vad var Newton-Raphsons metod?



## Fråga 17.

Vad var Newton-Raphsons metod?

**Röd:** Ingen aning.

**Grön:** Självklart så minns vi!

## Fråga 17.

Vad var Newton-Raphsons metod?

**Röd:** Ingen aning.      **Grön:** Självklart så minns vi!

Den sade att om vi vill hitta en lösning till en två gånger deriverbar ekvation  $f(x) = 0$  så kan vi hitta lösningen som

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k$$

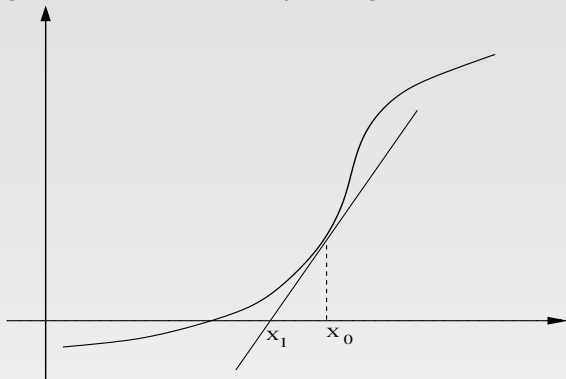
där

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

om vår första gissning av  $x_0$  är tillräckligt nära lösningen.

## Fråga 17. Fortsättning.

Kan ni försöka övertyga er om Newton-Raphsons Metod genom att betrakta följande graf:



## Fråga 19.

Låt  $y(x)$  vara lösningen till följande differentialekvation

$$y'(x) + g(x)y(x) = f(x),$$

vilket av följande uttryck har  $y(x)$ :

**Röd:**  $y(x) = e^{-g(x)} \int e^{G(x)} f(x) dx.$

**Gul:**  $y(x) = e^{G(x)} \int e^{-G(x)} f(x) dx.$

**Grön:**  $y(x) = e^{-G(x)} \int e^{G(x)} f(x) dx.$

Där  $G(x) = \int g(x) dx.$

## Fråga 20.

Låt  $y(x)$  vara lösningen till följande differentialekvation

$$y'(x) = \frac{h(x)}{g(x)},$$

vilket av följande uttryck har  $y(x)$ :

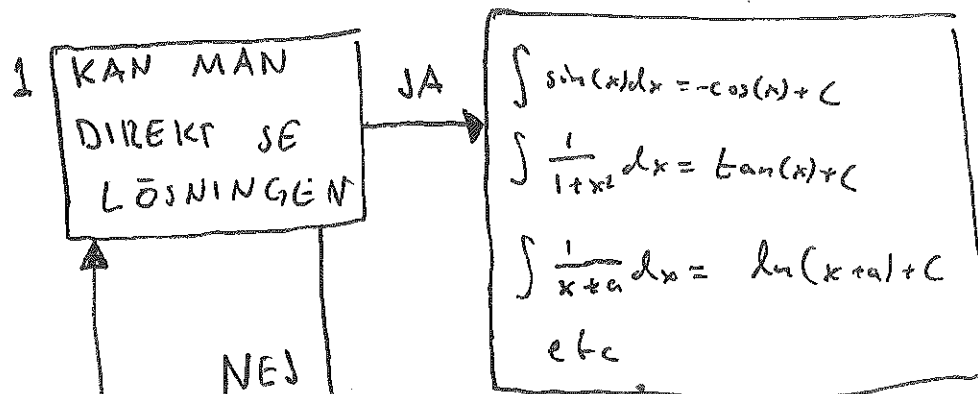
**Röd:**  $y(x) = G^{-1}(\int h(x)dx)$ .

**Gul:**  $y(x) = G(H(G^{-1}(x)))$ .

**Grön:**  $y(x) = ae^{\alpha x} + be^{\beta x} + y_p(x)$  där  $\alpha$  och  $\beta$  är rötter till det karakteristiska polynomet och  $y_p$  är en partikulärlösning.

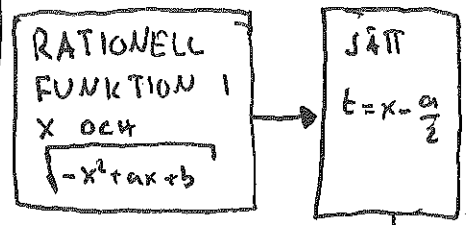
Där  $G(x) = \int g(x)dx$  och  $H(x) = \int h(x)dx$ .

# PRIMITIVA FUNKTIONER

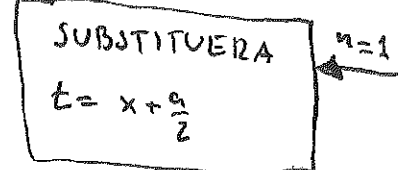
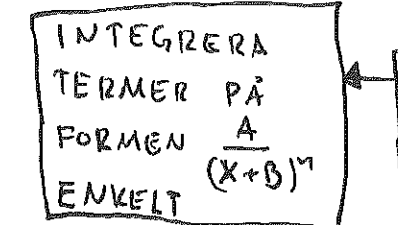
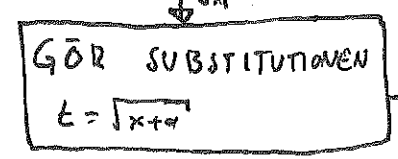
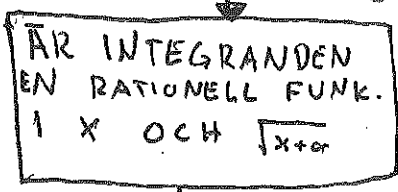


GUIDE

- 1) KAN VI GÖRA EN PARTIELL INT
- 2) KAN VI GÖRA EN STANDARD SUBST SOM LEDER TILL EN
- 3) PARTIALLBRÄKSUPP. SOM GER 2 INTEGRANDER  $\frac{1}{(x+a)^n}$  OCH  $\frac{1}{(x^2+ax+b)^n}$

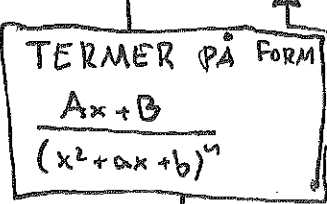
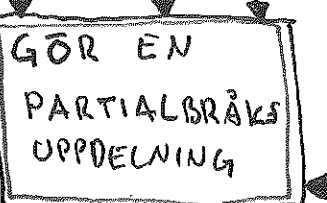
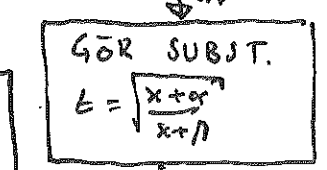
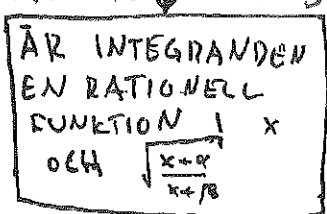


## STANDARD SUBSTITUTIONER



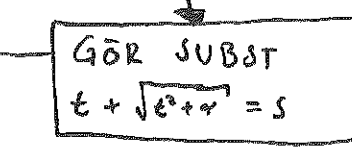
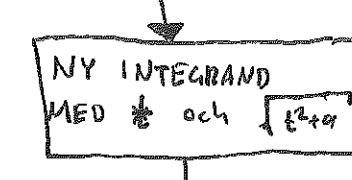
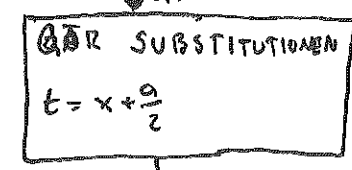
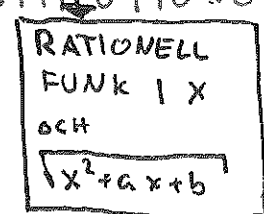
$$\int \frac{ct}{t^2+a} + \int \frac{d}{t^2+a}$$

$$\frac{c}{2} \ln|t^2+a| + \frac{d}{\sqrt{a}} \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{a}}\right)$$

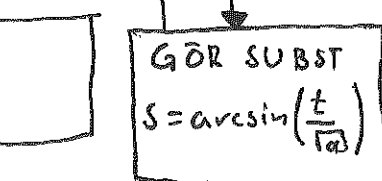
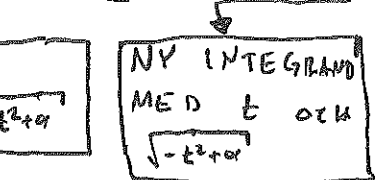
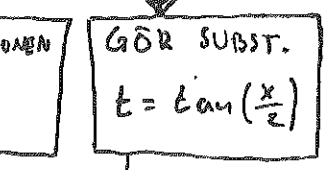
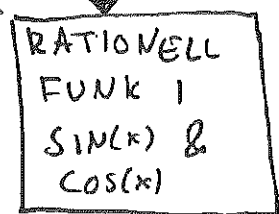


$n=1$


SKRIV  $\int \frac{Ax+B}{(x^2+ax+b)^n} dx$



SE SID 275-276 I PB



~~Handwritten scribbles and corrections at the bottom of the page.~~



December 14, 2014

## Fråga 21.

Gör ett motsvarande flödesdiagram  
där ni visar vilka metoder som vi lärt oss  
för att lösa differentialekvationer.



## Fråga 22.

Antag att  $f(0) = 1$ ,  $f'(0) = 0$  och  $|f''(x)| \leq M$  för något  $M > 0$   
och alla  $x \in \mathbb{R}$ .

Vilket är det största/minsta värdet som  $f(x)$  kan antaga i en  
given punkt  $x \in \mathbb{R}$ ?

**Röd:**  $f(x)$  kan vara positiva oändligheten i  $x$  men  $f(x) \geq 1$

**Gul:** Omöjligt att avgöra med den givna informationen.

**Grön:**  $f(x) \leq 1 + \frac{M}{2}x^2$  och  $f(x) \geq 1 - \frac{M}{2}x^2$

## Fråga 22.

Antag att  $f(0) = 1$ ,  $f'(0) = 0$  och  $|f''(x)| \leq M$  för något  $M > 0$   
och alla  $x \in \mathbb{R}$ .

Vilket är det största/minsta värdet som  $f(x)$  kan antaga i en  
given punkt  $x \in \mathbb{R}$ ?

**Röd:**  $f(x)$  kan vara positiva oändligheten i  $x$  men  $f(x) \geq 1$

**Gul:** Omöjligt att avgöra med den givna informationen.

**Grön:**  $f(x) \leq 1 + \frac{M}{2}x^2$  och  $f(x) \geq 1 - \frac{M}{2}x^2$

Vad har detta att göra med Taylorserier?

## Fråga 23.

Taylor's formel säger att

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(x_1)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

för något  $x_1$  mellan  $x_0$  och  $x$ .

Förklara för personen bredvid dig varför Taylor's formel för  $n = 0$  är samma sak som medelvärdessatsen för derivatan.

## Fråga 24.

Låt  $f(x)$  vara en oändligt deriverbar funktion och antag att det finns ett  $n \in \mathbb{N}$  så att Taylorpolynomet  $p_m(x) = p_n(x)$  för alla  $m \geq n$ . Vad kan man säga om funktionen  $f(x)$ ?

**Röd:**  $f(x)$  måste vara en konstant.

**Gul:**  $f(x)$  måste vara ett polynom av högst grad  $n$

**Grön:** Inget av de ovanstående.

Gymnasie matte  
i) det av sin/cos log,  $e^x$  etc.  
ii) räkneregler för elementära funktioner

Standard Gränsvärden  
 $\frac{\sin(x)}{x} \rightarrow 1 \quad x \rightarrow 0$   
 $\frac{\ln(1+x)}{x} \rightarrow 1 \quad x \rightarrow 0$   
 $\frac{a^x}{x^b} \rightarrow \infty$  då  $x \rightarrow \infty$  om  $a > 1$   
etc... etc

Teori för polynom  
sissam polynom division

Partiellbräks uppdelning av integranden

Enkla metoder för beräkning av  
 $\frac{x^7 + e^x}{x^3 + \sin(x)}$  då  $x \rightarrow \infty$  etc.

Standard substitutioner

Produktregeln

Linjära 1:a ordningens Diff. eku. Lösningsformel

Separabla 1:a ordningens Diff. eku Lösningsformel

Olösheter

Absolut belopp  
 $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

Räkneregler för Gränsvärden  
i) summa regeln  
ii) produkt regeln  
iii) sammansättnings regeln etc...

Standard Derivator  
 $D \ln(x) = \frac{1}{x}$ ,  $D e^x = e^x$   
etc

Kedje regeln  
 $Df(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$

Partiell integration

~~Partiell~~ Variabel substitution

$\epsilon$ - $\delta$  Definitionen.  
 $f(x) \rightarrow a$  då  $x \rightarrow x_0$   
Om  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$   
så att  
 $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \epsilon$

Definition av kontinuerlig funktion

Derivator:  
 $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Deriverbar  $\Rightarrow$  kontinuerlig

Differential ekvationer

Homogena lösningar från karakteristiskt polynom

2:a Ordningens  $y'' + ay' + by = h(y)$

Partikulär lösningar  
Finns ca 6 fall  
Ansätt rätt och beräkna koefficienter

Kompletthets axiomet:  
En mängd begränsad från ovan har en minsta övre begränsning i  $\mathbb{R}$

Satsen om mellanliggande värden:  
 $f$  kontinuerlig  
 $f(a) < 0$ ,  $f(b) > 0$   
 $\Rightarrow \exists \xi \in [a, b], f(\xi) = 0$

Uniformt kontinuerliga funktioner:  
 $f$  kontinuerlig på  $[a, b]$   
 $\Rightarrow f$  uniformt kontinuerlig

Primitiva funktioner  
Dvs. derivatans invers  
 $F'(x) = f(x)$

Analysens Hundsats  
 $D \int_a^x f(t) dt = f(x)$

Riemanns Integral  
 $\inf I(\phi) = \int_a^b f(x) dx = \sup I(\psi)$   
så  $\phi(x) \geq f(x) \geq \psi$   
 $\phi$  &  $\psi$  trappfunktioner

Trapp funktioner  
Enkla att beräkna ytan under

Bolzano - Weierstrass sats.  
En begränsad mängd har ett gränsvärde

Satser om kont. funktioner.  
Tex  $f$  kont  $\Rightarrow f$  begränsad på slutna intervall

Kontinuerliga funktioner är Riemann integrerbara



December 14, 2014

## Fråga 25.

Titta på kurskartan och

- 1 Se vilka delar av kursen som inte är med på kurskartan.
- 2 Se om du kan spåra de idéer vi introducerade om gränsvärden genom hela kursen och se om du kan skapa en överblicka av analysen som en helhet.
- 3 Försök att själv sammanfatta kursen på något lämpligt sätt.  
Tex.
  - 1 Gör en egen kurskarta som fokuserar på alla räkneregler vi har lärt oss (log-lagar, lagar för trig funktioner, partiell integration, varabelsubstitution, produkt och summa regler, etc etc.)
  - 2 Skriv ner de tio viktigaste sakerna du lärt dig som du inte visste när du kom hit.