Svar till vissa uppgifter från första veckan.

Svar till kortuppgifter F2:

1. Ja! Förhoppningsvis så ser man direkt att $g \circ f(x)$ är ett polynom. Vidare så gäller det att $g \circ f(\alpha) = g(f(\alpha)) = g(\beta) = 0$. Använd faktorsatsen! Försök att komma ihåg bokens satser så väl att ni ser när det är applicerbara.

2. Nej! Högerledet är ett polynom men vänsterledet är inget polynom.

3. Ja! Talet är bara $\binom{113}{62}$ vilket är antalet sätt man kan välja 62 saker av 113 utan att bry sig om ordningen.

4. Inga! Det finns inga tal som är inom 1 enhet från 3 och inom 3 enheter från 100.

5. Av fjärde ordningen och 0.

Svar uppgift 2.1a) i Persson-Böjers: Vi ska beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}.$$

Det första vi måste göra är att titta på definitionen av $\lim_{x\to\infty} f(x)$. Definitionen talar om exakt vad symbolen $\lim_{x\to\infty}$ betyder och därigenom exakt vad vi behöver beräkna.

Definition 1. *Vi säger att $f(x)$ går till a då x går till oändligheten, eller i symboler $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$, om det för varje $\epsilon > 0$ existerar ett $C_\epsilon > 0$ så att*

$$|f(x) - a| < \epsilon \textit{ för varje } x > C_\epsilon.$$

Vi måste alltså hitta det tal a så att vi, för varje $\epsilon > 0$, kan hitta ett $C_\epsilon > 0$ så att

$$\left|\frac{1}{x^2} - a\right| < \epsilon \text{ för varje } x > C_\epsilon,$$

där vi har stoppat in vår funktion $f(x) = \frac{1}{x^2}$ i uttrycket i definitionen.

Intuitivt så verkar det rimligt att $\frac{1}{x^2} \to 0$ då $x \to \infty$. Vi gissar därför att $a = 0$, dvs. $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. För att försäkra oss, eller bevisa, att $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ så måste vi uppfylla de kriterier som definitionen anger.

Vi måste därför bevisa att det för varje $\epsilon > 0$ existerar ett C_ϵ så att

$$\left|\frac{1}{x^2} - 0\right| = \left|\frac{1}{x^2}\right| < \epsilon \text{ för varje } x > C_\epsilon. \tag{1}$$

Detta är väldigt abstrakt. Men som tur är så har vi precis diskuterat olikheter. Observera att

$$\left|\frac{1}{x^2}\right| < \epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\epsilon} < x^2,$$

här använder vi att $\epsilon > 0$ och att $x^2 > 0$ då $x \neq 0$ (om vi hade ett $\epsilon < 0$ så skulle olikhetstecknet vara åt andra hållet).

Vidare så gäller det att $\frac{1}{\epsilon} < x^2$ om $\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} < x$ (eller $\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} < -x$).

Vi har därför visat att för varje $\epsilon > 0$ så är

$$\left| \frac{1}{x^2} \right| < \epsilon \text{ för varje } x > \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}. \tag{2}$$

Vi ville visa att *det existerar* ett $C_\epsilon > 0$ så att

$$\left| \frac{1}{x^2} \right| < \epsilon \text{ för varje } x > C_\epsilon.$$

Ekvation (2) säger att ett sådant tal C_ϵ existerar, nämligen talet $\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$. Vi har därigenom visat att för varje $\epsilon > 0$ så existerar ett tal så att (1) håller. Så definitionen håller för $a = 0$. Vi har därmed bevisat att

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

Svar uppgift 2.1e) i Persson-Böjers: Vi ska beräkna $\lim_{x\to\infty}\sin(x)$.

Om vi tittar på grafen av $\sin(x)$ så ser vi att den oscillerar mellan -1 och 1. Intuitivt så har därför inte $\sin(x)$ något gränsvärde då $x \to \infty$. Låt oss försöka bevisa att gränsvärdet inte existerar.

Vi kommer att bevisa detta genom ett motsägelseargument. Motsägelseargument är en kraftfull teknik inom matematiken. Iden är att antaga motsatsen till det man vill bevisa och sedan använda det antagandet till att härleda en motsägelse. Eftersom vi inte tror att matematiken har några motsägelser så kan vi dra slutsatsen att vårt antagande var falskt. Anledningen till att motsägelse argument är så kraftfulla är att vi får ett extra antagande att arbeta med.

Låt oss då, i hopp om att kunna härleda en motsägelse, antaga att det existerar ett tal $a \in \mathbb{R}$ så att

$$\lim_{x\to\infty}\sin(x) = a. \tag{3}$$

Observera att vi säger inte vad a är. Om vi skulle specificera $a = 0$ och sen härleda en motsägelse så skulle vi bara kunna dra slutsatsen att gränsvärdet inte var noll. Eftersom vi vill visa att $\sin(x)$ inte har *något* gränsvärde så specificerar vi inte a.

Enligt definitionen för gränsvärden så betyder (3) att det för varje $\epsilon > 0$ existerar ett $C_\epsilon > 0$ så att

$$|\sin(x) - a| < \epsilon \text{ för varje } x > C_\epsilon.$$

Vi kan då specifikt, genom att välja $\epsilon = 1/2$, säga att det existerar ett $C_{1/2}$ så att

$$|\sin(x) - a| < \frac{1}{2} \text{ för varje } x > C_{1/2}. \tag{4}$$

"Var kom detta ifrån?" kan man undra? Hur ska man kunna lista ut att det här är rätt väg att gå? Men tänker vi lite på vad vi gör så är det här steget helt naturligt. Vi antar att $\sin(x) \to a$ i hopp om att hitta en motsägelse. Då vi gör det antagandet så måste vi använda det och det enda sättet att använda det är att gå till definitionen och ekvation (4) är ju bara definitionen med $\epsilon = 1/2$. Att vi väljer just det värdet på ϵ är lite godtyckligt. Men då $\sin(x)$ oscillerar från -1 till 1 så är det ganska rimligt att vi borde kunna få en motsägelse med $\epsilon = 1/2$.

Vi kan också välja $k \in \mathbb{N}$ så stort att $2\pi k > C_{1/2}$ (detta anses inte vara uppenbart utan kallas "den Archimediska egenskapen" för de reella talen efter matematikern Archimedes). Då gäller

$$\begin{aligned} 2 = |1-(-1)| &= \left|\sin\left(2\pi k + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(2\pi k + \frac{3\pi}{2}\right)\right| = \\ &= \left|\left(\sin\left(2\pi k + \frac{\pi}{2}\right) - a\right) - \left(\sin\left(2\pi k + \frac{3\pi}{2}\right) - a\right)\right|, \end{aligned}$$

där vi har adderat och subtraherar a i sista uttrycket. Vi kan nu använda triangelolikheten för absolutbeloppet och dra slutsatsen att

$$2 = \left|\left(\sin\left(2\pi k + \frac{\pi}{2}\right) - a\right) - \left(\sin\left(2\pi k + \frac{3\pi}{2}\right) - a\right)\right| \leq \tag{5}$$

$$\leq \left|\sin\left(2\pi k + \frac{\pi}{2}\right) - a\right| + \left|\sin\left(2\pi k + \frac{3\pi}{2}\right) - a\right|. \tag{6}$$

Eftersom $2\pi k > C_{1/2}$ så måste både $2\pi k + \frac{\pi}{2} > C_{1/2}$ och $2\pi k + \frac{3\pi}{2} > C_{1/2}$ gälla. Vi kan därför använda (4) och dra slutsatsen att

$$\left|\sin\left(2\pi k + \frac{\pi}{2}\right) - a\right| < \frac{1}{2}$$

och

$$\left|\sin\left(2\pi k + \frac{3\pi}{2}\right) - a\right| < \frac{1}{2}.$$

Om vi använder de två sista uttrycken i (5)-(6) så kan vi dra slutsatsen

$$2 \leq \left|\sin\left(2\pi k + \frac{\pi}{2}\right) - a\right| + \left|\sin\left(2\pi k + \frac{3\pi}{2}\right) - a\right| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Men att $2 < 1$ är uppenbarligen absurt och vi kan dra slutsatsen att något av våra antaganden är felaktigt.

Vi har bara använt enkla beräkningar, triangelolikheten (vilken vi har bevisat) och antagandet att $\lim_{x\to\infty} \sin(x) = a$. Det enda som kan vara fel är vårt antagande $\lim_{x\to\infty} \sin(x) = a$.

Vi kan därför dra slutsatsen att det inte finns något a så att $\lim_{x\to\infty} \sin(x) = a$. Gränsvärde saknas.

Funktionen har inget gränsvärde då $x \to \infty$.

Svar uppgift 2.1f) i Persson-Böjers: Från grafen så kan vi gissa att $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$. Detta eftersom

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{för } x > 0 \\ \text{odefinierad} & \text{för } x = 0 \\ -1 & \text{för } x > 0. \end{cases}$$

Vi hävdar att vi kan välja $C_\epsilon = 0$ (dvs. C_ϵ existerar) för varje $\epsilon > 0$. Detta eftersom för varje $x > C_\epsilon = 0$ så gäller

$$|f(x) - 1| = |1 - 1| = 0 < \epsilon.$$

Vi har därmed, enligt definitionen, visat att ett C_ϵ (nämligen $C_\epsilon = 0$ och nollan existerar) existerar för varje $\epsilon > 0$ så att

$$|f(x) - 1| < \epsilon \text{ för varje } x > C_\epsilon.$$

Därmed så har vi bevisat att $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$.

Svar: $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$.

Kommentarer: Dessa uppgifter kan tyckas vara ganska onödiga. Speciellt eftersom varje svar börjar med att vi "intuitivt" gissar svaret. Varför inte nöja sig med intuitionen?

Det finns flera svar på den frågan. Det enklaste svaret är att det inte alls är uppenbart att $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, något som vi kommer att se redan nästa vecka. Och ju längre vi studerar matematik ju mer "icke intuitiva" gränsvärden kommer vi att stöta på.

Det viktigaste med ovanstående beräkningar är att vi kan överge intuitionen i matematiken och istället förlita oss på matematisk formalism. Vi kan binda vår intuitiva förståelse av matematiken med matematiska formler. Och med hjälp av formalismen så kan vi gå oändligt mycket längre. Tex. så kan vi beräkna gränsvärden för oändligdimensionella vektorrum (men inte i den är kursen).

Vad som är intressant är hur väl definitionen överensstämmer med intuitionen för enkla beräkningar.

Om du inte förstår ovanstående beräkningar så gör ett till försök. Men var inte orolig, vi kommer att diskutera det här igen under kursens gång.

Svar på Bevisuppgiften vecka 36: Vi ska bevisa följande sats:

Sats 1. *Låt $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ vara ett polynom av grad n. Då har $f(x) = 0$ som mest n olika lösningar.*

Bevis: Iden som direkt dyker upp är att använda ett motsägelseargument precis som i uppgift 2.1e). Vi antar därför motsatsen till det vi ska bevisa:

Antagande i hopp om att få en motsägelse: *Vi antar att $f(x)$ är ett polynom av grad n som har minst $n+1$ olika lösningar. Det vill säga att det finns $n+1$ olika tal $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_{n+1}$ så att $f(\alpha_k) = 0$ för alla $k = 1, 2, 3, ..., n+1$.*

Om vi kan visa att ovanstående antagande leder till en motsägelse så kan vi dra slutsatsen att det inte finns något polynom av grad n som har fler än n olika rötter.

Vi har antagit att f är ett polynom och att $f(\alpha_1) = 0$. Därmed så är de antaganden som görs i faktorsatsen uppfyllda och vi kan dra slutsatsen att det finns ett polynom q_1 så att

$$f(x) = (x - \alpha_1)q_1(x). \tag{7}$$

Enligt antagande så gäller det att $f(\alpha_2) = 0$ så vi kan substituera $x = \alpha_2$ i ekvation (7) dra slutsatsen att

$$0 = f(\alpha_2) = (\alpha_2 - \alpha_1)q_1(\alpha_2). \tag{8}$$

Eftersom rötterna är olika så gäller $\alpha_1 \neq \alpha_2$ vilket är samma sak som $\alpha_2 - \alpha_1 \neq 0$. Vi kan därför dela alla led i (8) med $\alpha_2 - \alpha_1$ och dra slutsatsen att

$$0 = q_1(\alpha_2). \tag{9}$$

Så $q_1(x)$ är ett polynom och $q_1(\alpha_2) = 0$. Vi kan därför använda faktorsatsen igen och dra slutsatsen att det finns ett polynom q_2 så att

$$q_1(x) = (x - \alpha_2)q_2(x).$$

Sätter vi in det i (7) så får vi

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)q_2(x).$$

Börjar vi förstå principen?

Vi fortsätter med ett induktionsliknande argument antar att vi har bevisat att för $k < n+1$ så det finns ett polynom $q_k(x)$ så att

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_k)q_k(x). \tag{10}$$

Av att $f(\alpha_{k+1}) = 0$ så följer det att

$$0 = f(\alpha_{k+1}) = (\alpha_{k+1} - \alpha_1)(\alpha_{k+1} - \alpha_2) \cdots (\alpha_{k+1} - \alpha_k) q_k(\alpha_{k+1}). \tag{11}$$

Eftersom $\alpha_{k+1} \neq \alpha_1$, $\alpha_{k+1} \neq \alpha_2$,..., $\alpha_{k+1} \neq \alpha_k$ så kan vi dela (11) med $(\alpha_{k+1} - \alpha_1)(\alpha_{k+1} - \alpha_2) \cdots (\alpha_{k+1} - \alpha_k) \neq 0$ och dra slutsatsen att

$$0 = q_k(\alpha_{k+1}). \tag{12}$$

Vi kan därför använda faktorsatsen och dra slutsatsen att det existerar ett polynom q_{k+1} så att

$$q_k(x) = (x - \alpha_{k+1}) q_{k+1}(x).$$

Sätter vi in det i (10) så kan vi dra slutsatsen att

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_{k+1}) q_{k+1}(x).$$

Då detta är sant för alla $k < n+1$ så kan vi via induktion dra slutsatsen att det finns ett polynom q_{n+1} så att

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_{n+1}) q_{n+1}(x). \tag{13}$$

Det enda antagandet som vi inte har använt är att f är av grad n. Det är därför rimligt att försöka använda det antagandet för att härleda en motsägelse (observera att själva formuleringen av Satsen här ger en liten ledtråd om hur det ska bevisas).

Vänsterledet i ekvation (13) är alltså ett polynom av grad n. Men om vi multiplicerar ihop parenteserna $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_{n+1})$ så får vi ett polynom av grad $n+1$. Vi vet också att q_{n+1} är ett polynom så grad$(q_{n+1}) \geq 0$. Så om vi multiplicerar ihop alla termer i högerledet så får vi ett polynom av en grad som är minst $n + 1$. Men ett polynom av grad n (vänsterledet) kan inte vara lika med ett polynom av grad större än n (högerledet). Så ekvation (13) är en motsägelse. Satsen är därigenom bevisad. $\square$