Svar till vissa uppgifter från den tionde veckan, dvs vecka 47.

1 (Svar till kortfrågor inför F21):

i) Om $f(x)$ är en kontinuerlig funktion på $\mathbb{R}$ så att $f(x) \leq 10$ kommer då $\int_{-2}^{1} f(x)dx \leq 30$? Kommer $\int_{-2}^{1} f^2(x)dx \leq 300$?

Svar: $\int_{-2}^{1} f(x)dx \leq 30$ eftersom $\int_{-2}^{1} f(x)dx \leq \int_{-2}^{1} 10dx \leq 30$. Det andra påståendet är inte sant. (Motexempel $f = -100 \leq 10$.)

ii) Om $f(x)$ är en kontinuerlig funktion på $]0,\infty[$ så att $|f(x)| \leq |x|^{\alpha}$ för alla $x > 0$. För vilka värden på $a > 0$ och α kommer $\int_{a}^{\infty} |f(x)|^2 dx$ garanterat att vara konvergent?

Svar: Om $a > 0$ så konvergerar integralen för $\alpha < -1/2$. Om $a = 0$ så är integralen divergent för alla α.

iii) Är sats 11 på sidan 316 sats sann utan antagandet $f \geq 0$?

Svar: Nej (Tex om $f(x) = -\frac{1}{x}$ så är $f < g = 0$ och $\int_0^{\infty} g(x)$ är konvergent men $\int_0^{\infty} f(x)dx$ är divergent.)

iv) **Svår?** Låt $f(x)$ vara integrerbar på $[-1,1]$ och $f(0) = 0$. Är den generaliserade integralen $\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{x}dx$ konvergent om $f(x)$ är begränsad? Kontinuerlig (Ledtråd: Är $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|\ln(|x|)|} & \text{om } x \neq 0 \\ 0 & \text{om } x = 0 \end{cases}$ kontinuerlig?)? Deriverbar?

Svar: Divergent i allmänhet om f är begränsad eller kontinuerlig (exemplet i ledtråden är kontinuerlig.). Men om f är deriverbar så kommer $f(x)/x$ att vara begränsad så integralen blir konvergent.

v) Antag att $f(x)$ är kontinuerlig på $[0,1]$ och att den generaliserade integralen $\int_0^1 \frac{|f(x)|}{x}dx$ konvergerar. Kommer då $\int_0^1 \frac{|f(x)|^2}{x}dx$ att konvergera?

Svar: Ja!

2 (Svar till kortfrågor inför F22):

vi) Vi vet att $1 - |x|$ inte är primitiv funktion till någon funktion definierad på $[-1,1]$ (eftersom derivatan av $1 - |x|$ inte är definierad i $x = 0$). Men finns det någon funktion $f(x)$ så att $1 - |x| = \int_{-1}^{x} f(t)dt$? Reflektera!

Svar: Ja det finns en sådan funktion. Reflektionen är att integralen är mer generell än primitiva funktionen. Detta leder till möjligheten att definiera ett mer generellt derivatabegrepp. Men det är något som vi måste lämna till en annan kurs.

vii) Vilken kurva i planet är $(\sin(t), \cos(t))$ för $t \in [0, 2\pi[$? Vilken kurva är $(2\sin(t), 3\cos(t))$ för $t \in [0, 2\pi[$? Vilken kurva är $(\sin(t), \cos(t))$ för $t \in [0, 4\pi[$?

Svar: Första kurvan ger en cirkel i planet, den andra en ellips och den tredje ger en cirkel genomlöpt två varv.

viii) Rotationsvolymen som fås när området mellan grafen av den kontinuerliga funktionen $f(x)$, $a \leq x \leq b$ roteras kring $x-$axeln är noll. Vad är $f(x)$?

Svar: 0 (Rotationsvolymen är $\int_a^b \pi f^2(x)dx$ vilken är lika med noll endast om $f(x) = 0$ (här använder vi kontinuitet) eller $a = b$)

ix) Finns det någon rotationssymmetrisk kropp given av en deriverbar funktion $f(x)$ på $[0,\infty[$ så att kroppens yta är oändlig men dess volym ändlig?

Svar: Ja (tex $f(x)=\frac{1}{1+x}$.)

x) Finns det någon rotationssymmetrisk kropp given av en begränsad och deriverbar funktion $f(x)$ på $[0,\infty[$ så att kroppens volym är oändlig men dess yta ändlig?

LEDTRÅD: *Eftersom* $f'(x)^2 \geq 0$ *så kommer* $\sqrt{1+f'(x)^2} \geq 1$.

Svar: Nej

7: Bevisuppgift 1 (Hölders olikhet): Bevisa Hölders olikhet. Dvs om $f(x)$ och $g(x)$ är kontinuerliga på $[0,1]$ så

$$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx \leq \left(\int_{-1}^{1} f(x)^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_{-1}^{1} g(x)^2 dx\right)^{1/2}.$$

Använd gärna följande steg:

1. Visa att $\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx \leq \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1} f(x)^2dx + \int_{-1}^{1} g(x)^2dx\right)$.

   LEDTRÅD: *Kan du visa olikheten utan integraltecknen?*

2. Bevisa att om $\int_{-1}^{1} f(x)^2dx = 1$ och $\int_{-1}^{1} g(x)^2dx = 1$ så kommer $\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx \leq 1$.

   LEDTRÅD: *Föregående steg.*

3. Beteckna $\|f\|_{L^2(-1,1)} = \left(\int_{-1}^{1} f(x)^2dx\right)^{1/2}$ och låt $\tilde{f}(x) = \frac{1}{\|f\|_{L^2(-1,1)}} f(x)$ samt $\tilde{g}(x) = \frac{1}{\|g\|_{L^2(-1,1)}} g(x)$. Kan man använda föregående steg på $\tilde{f}$ och $\tilde{g}$? Vad betyder det för f och g?

Bevis:

1. För alla x så gäller $0 \leq (f(x)-g(x))^2 = f^2(x) - 2f(x)g(x) + g^2(x)$ så, för alla x, $f(x)g(x) \leq \frac{1}{2}f^2(x) + \frac{1}{2}g^2(x)$. Så

   $$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx \leq \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1} f(x)^2dx + \int_{-1}^{1} g(x)^2dx\right)$$

   enligt Sats 5 p. 302 i Persson-Böiers.

2. Detta är en direkt konsekvens av föregående steg.

3. Vi beräknar

   $$\int_{-1}^{1} \tilde{f}^2(x)dx = \int_{-1}^{1}\left(\frac{f(x)}{\|f\|_{L^2(-1,1)}}\right)^2 dx = \frac{1}{\|f\|^2_{L^2(-1,1)}}\int_{-1}^{1} f^2(x)dx = 1,$$

   där vi använde att $\|f\|^2_{L^2(-1,1)} = \int_{-1}^{1} f(x)^2dx$.

   På samma sätt så är $\int_{-1}^{1} \tilde{g}^2(x)dx = 1$. Så enligt föregående steg så är

   $$\int_{-1}^{1} \tilde{f}(x)\tilde{g}(x)dx \leq 1$$

men detta är samma sak, eftersom $\tilde{f}(x) = \frac{1}{\|f\|_{L^2(-1,1)}} f(x)$ samt $\tilde{g}(x) = \frac{1}{\|g\|_{L^2(-1,1)}} g(x)$, som

$$\frac{1}{\|f\|_{L^2(-1,1)}\|g\|_{L^2(-1,1)}} \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx \leq 1$$

eller

$$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx \leq \|f\|_{L^2(-1,1)}\|g\|_{L^2(-1,1)} = \left(\int_{-1}^{1} f(x)^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_{-1}^{1} g(x)^2 dx\right)^{1/2}.$$

vilket var det vi skulle bevisa.

Kommentar: Mycket av det vi gör i Diff-Inten är möjligt att generalisera. Här så luktar vi lite på en generalisering till av analysen till funktioner. Detta ingår inte riktigt i kursen men det kan vara bra att se vad som kommer senare. Notationen $\|f(x)\|_{L^2(-1,1)}$ kallas L^2-normen ("Ell två normen") av $f(x)$. Det är ett sätt att mäta avstånd mellan funktioner. Intuitivt så är funktionen $f(x)$ är nära $g(x)$ om $\|f(x)-g(x)\|_{L^2(-1,1)} = \left(\int_{-1}^{1}(f(x) - g(x))^2\right)^{1/2}$ är liten. Med den intuitionen så kan vi definiera gränsvärden av sekvenser av funktioner. Tex så skulle vi kunna säga att sekvensen av funktioner $f_1(x), f_2(x), f_3(x), ..., f_k(x), ...$ konvergerar mot funktionen $f(x)$ om det för varje $\epsilon > 0$ existerar ett $N > 0$ så att

$$\|f_k(x) - f(x)\|_{L^2(-1,1)} < \epsilon \qquad \text{för alla } k > N.$$

Detta är samma definition som vi är vana vid men nu pratar vi om funktioner som konvergerar och inte tal.

Många av de satser som vi bevisar går att bevisa även för sekvenser av funktioner men vi ska inte diskutera dessa problem nu. Vi lämnar det till en senare kurs.

8: Bevisuppgift 2 (Osäkerhetsprincipen): Bevisa att om $f(x)$ är kontinuerligt deriverbar på $[-1, 1]$, $f(-1) = f(1) = 0$ och $\int_{-1}^{1} f(x)^2 dx = 1$ så gäller följande olikhet:

$$\int_{-1}^{1} x^2 f(x)^2 dx \int_{-1}^{1} f'(x)^2 dx \geq \frac{1}{4}.$$

LEDTRÅD: *Kan du använda partiell integration på $\int_{-1}^{1} f(x)^2 dx = 1$ tillsammans med Hölders olikhet?*

Bevis: Observera att

$$1 = \left|\int_{-1}^{1} f^2(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{dx} f^2(x)dx\right| = \left\{\begin{array}{l}\text{partiell}\\ \text{integration}\end{array}\right\} =$$

$$= \left|f^2(1) + f^2(-1) - \int_{-1}^{1} 2xf(x)f'(x)dx\right| = \left\{\begin{array}{l}\text{eftersom}\\ f(-1) = f(1) = 0\end{array}\right\} = \left|-2\int_{-1}^{1} xf(x)f'(x)dx\right| \leq$$

$$\leq \left\{\begin{array}{l}\text{Hölders}\\ \text{olikhet}\end{array}\right\} \leq 2\left(\int_{-1}^{1} (f'(x))^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_{-1}^{1} x^2 f^2(x)dx\right)^{1/2}$$

satsen följer genom att ta kvadraten av båda sidor och dividera med 4.

Kommentar: I kvantfysiken så kan den här matematiska olikheten tolkas som att det är omöjligt att exakt avgöra både rörelsemängden och positionen av en partikel. Tyvärr så involverar förklaringen till detta allt för mycket teoretiskt matreal för att vi ska kunna gå in på varför här.