Svar till vissa uppgifter från den elfte veckan, dvs vecka 48.

1 (Svar till kortfrågor inför F23):

i) En termostat ser till att temperaturen, $T(t)$, i tidpunkten t förändras enligt $T'(t) = 20 - T(t)$ vilka är de temperaturer som termostaten håller konstant.

Svar: 20 (Då säger diff ekvationen att $T' = 0$, dvs temperaturen förändras inte.)

ii) Skriv ner en differentialekvation vars lösning $y(x)$ växer då $y(x) \leq -1$, avtar då $y(x) > 1$ och inte förändras (med avseende på x) då $y(x) = 1/2$.

Svar: Tex $y' = -(y - \frac{1}{2})$ eftersom då kommer $y' > 0$ då $y < 1/2$, $y' < 0$ då $y > 1/2$ och $y' = 0$ då $y = 1/2$.

iii) Låt $f(x)$ vara en given kontinuerlig funktion på $\mathbb{R}$. Kommer $y(x) = \int_0^x f^2(t)dt$ att lösa differentialekvationen $y'(x) = f^2(x)$?

Svar: Ja enligt analysens huvudsats.

iv) Låt $G(x)$ vara en deriverbar funktion och $h(x)$ en kontinuerlig funktion på $\mathbb{R}$. Vilken differentialekvation löser $y(x) = e^{-G(x)} \left(\int h(x) e^{G(x)} dx \right) + Ce^{-G(x)}$?

Svar: $y' + G'(x)y = h(x)$

2 (Svar till kortfrågor inför F24):

i) Vilka av följande ekvationer är separabla: $y^3(x)y'(x) = \cos(x)$, $y'(x) + 3x^2 y(x) = e^x$, $(x^2+1)y'(x) = y(x)\ln(|x|)$. Vad gör separabla ekvationer viktiga?

Svar: Den första och den tredje. De är viktiga eftersom vi kan använda kedjeregeln för att lösa dem.

ii) Vilken deriveringsregel gör separabla ekvationer förhållandevis enkla att lösa?

Svar: Kedjeregeln.

iii) Rita vektorfältet $(1, y^2+x)$, dvs en skiss av $xy-$planet där punkten (x, y) förses med vektorn $(1, y^2+x)$. Skissa sedan lösningen till $y'(x) = y^2+x$ i samma talplan.

Svar: Orkar inte!

iv) Låt $g(y) > 0$ vara en kontinuerlig funktion på $\mathbb{R}$ med primitiv funktion $G(x)$. Vilken differnetial ekvation löser $y(x) = G^{-1}(x) \left(\int h(x)dx + C \right)$?

Svar: $G'(y)y' = h(x)$.

v) Vilken sats från integralkalkylen är den fundamentala satsen för att lösa integralekvationen $y(x) = \int_0^x g(t)y(t)dt$?

Svar: Analysens huvudsats. Vi kan derivera integralekvationen och få en enkel linjär differentialekvation $y' = yg(x)$ som vi kan lösa.

8: Bevisuppgift 1: [LEIBNITZ KRITERIUM.] Antag att $a_1, a_2, a_3, a_4, ...$ är en sekvens av reella tal så att

i) $a_n \geq 0$ för alla n

ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

iii) a_n är avtagande, dvs $a_{n+1} \leq a_n$ för alla n.

Då kommer $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ att konvergera. Bevisa detta!
Du får gärna använda följande steg:

1. Sätt $S(k) = \sum_{n=1}^{k}(-1)^{n+1}a_k$ och konstatera att vi vill bevisa att $\lim_{k\to\infty} S(k)$ existerar. (Detta är ju definitionen för att summan $\sum_{n=1}^{k}(-1)^{n+1}a_k$ ska vara konvergent.)

2. Bevisa att $S(2k+1) \geq S(2k+2) \geq S(2k) \geq 0$.

3. Bevisa att $S(2k+1) \leq S(2k-1)$. Dra slutsatsen att $S(1) \geq S(2k+1)$ för alla k.

4. Använd Steg 2 och 3 för att bevisa att sekvensen $S(2), S(4), S(6), ..., S(2k), S(2k+2), ...$ är en växande och uppåt begränsad sekvens. Kan vi dra några slutsatser om växande och uppåt begränsade sekvenser?

5. Använd att $S(2k) = S(2k-1) - a_{2k}$ för att bevisa att $\lim_{k\to\infty} S(2k-1) = \lim_{k\to\infty} S(2k)$ och slutför ditt argument.