Svar till vissa uppgifter från den andra veckan.

Svar till kortfrågor F3:

i) Hitta en begränsad funktion $f(x)$ så att dess invers $f^{-1}(x)$ är definierad på $\mathbb{R}$, dvs. $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$.

Svar: Detta är omöjligt. Om f är begränsad så är V_f begränsad. Men $V_f = D_{f^{-1}}$ så $D_{f^{-1}}$ är begränsad och kan därför inte vara lika med $\mathbb{R}$ vilken är obegränsad.

ii) Är $f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)}$? Om inte så hitta ett motexempel.

Svar: Nej! Motexempel: $f(x) = \sqrt{x}$ på $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R};\ x > 0\}$ då är $f^{-1}(x) = x^2 \neq \frac{1}{\sqrt{x}}$.

iii) För vilka funktioner f är $f(\sin(x))$ en funktion?

Svar: Alla funktioner så att $[-1,1] \subset D_f$.

iv) Gäller följande utsaga: "Om $|f(x-2)-3| \leq |x|$ så följer det att $\lim_{x\to -2} f(x) = 3$?

Svar: Ja. Bevisa detta!

v) Gäller följande: "Om $f(x)$ inte är jämn så är $f(x)$ udda."?

Svar: Nej. Tex $f(x) = 1 + x$ vilken varken är jämn eller udda.

vi) Givet en funktion f definierad på $]-1,1[$ kan man skriva f som summan av en jämn och udda funktion?

Svar: Ja. Vi kan skriva $f(x) = \underbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{2}}_{\text{Jämn}} + \underbrace{\frac{f(x)-f(-x)}{2}}_{\text{Udda}}.$

vii) Om f är en udda funktion vad är $f(0)$?

Svar: Noll. Detta eftersom $f(0) = -f(-0)$.

viii) Vilka av följande påståenden är sanna om $f(x)$ är strängt växande?
a) $f(-x)$ är strängt avtagande.
b) $f(x)^2$ är strängt avtagande?

Svar: a) Detta är sant. Om $x > y$ så är $-x < -y$ vilket implicerar att $f(-x) < f(-y)$ så $f(-x)$ är strikt avtagande. b) Detta är falskt, tex så är $f(x) = x$ ett motexempel..

ix) Låt $f(x)$ vara en funktion definierad på $[-1,1]$ vilka av följande påståenden är sanna?
a) $f \circ \sin(x)$ är periodisk?
b) $\sin \circ f(x)$ är periodisk?

Svar: a) Sant. b) Falskt.

Kortfrågor till F4:

i) Antag att $a > b > 1$ och $x > 0$ gäller det då att ${}^a\log(x) >{}^b\log(x)$?

Svar: Nej. Ta tex $a = 4$ och $b = 2$ och $x = 16$. Då gäller $2 ={}^4\log(16) < 4 ={}^2\log(16)$.

ii) Låt $-1 \leq \kappa \leq 1$ och x ett godtyckligt reellt tal. Finns det tal a och b så att $a^2 + b^2 = 1$ och

$$a \sin(x) + b \cos(x) = \kappa?$$

Svar: Ja! Detta är omskrivningsregelm med hjälpvinkel.

iii) Finns det reella tal a och k så att ekvationen $ax + k = \tan(x)$ inte har någon lösning?

Svar: Nej! Skissa en graf så ser du varför.

6 Bevisuppgift: Bevisa Sinussatsen genom att använda Areasatsen.

Svar: Sinussatsen säger att relationen mellan en triangels vinklar α, β och γ och vinklarnas motstående sidor a, b och c uppfyller följande relation:

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}. \tag{1}$$

Vi vill bevisa (1) genom att använda areasatsen vilken säger att arean, A, av en triangel kan beräknas enligt

$$A = \frac{1}{2}bc \sin(\alpha) \quad A = \frac{1}{2}ac \sin(\beta) \text{ och } A = \frac{1}{2}ab \sin(\gamma). \tag{2}$$

Genom att använda de första två relationerna i (2) så får vi

$$\frac{1}{2}bc \sin(\alpha) = A = \frac{1}{2}ac \sin(\beta) \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b}, \tag{3}$$

där vi delade höger och vänsterled med $\frac{abc}{2}$. Observera att likheten i (3) är första likheten i Sinussatsen (1). Den andra likheten visas på samma sätt. $\square$