Svar till vissa uppgifter från den tredje veckan.

Svar tillKortfrågor inför F5:

i) Gäller följande påstående: "Om gränsvärdet $\lim_{x\to c} f(x)$ inte existerar så existerar inte $\lim_{x\to c} f^2(x)$."?

Svar: Nej, det gäller inte!

Tankesätt: (Detta är inget bevis!) Vi tror inte på påståendet och försöker därför att konstruera ett motexempel. Om vi ska konstruera ett motexempel till ovanstående så behöver vi en funktion f så att $\lim_{x\to c} f^2(x)$ existerar samtidigt som $\lim_{x\to c} f(x)$ inte existerar.

Eftersom kvadraten 'dödar' minustecken så behöver vi hitta någon funktion som ändrar tecken nära punkten c. Vi antar att Vi kan tex välja

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{om } x \geq c \\ -1 & \text{om } x < c. \end{cases}$$

Då är f diskontinuerlig i c men $f^2(x) = 1$ vilken naturligtvis har ett gränsvärde. Rita gärna en graf!

Lösningsprincip: Hitta ett motexempel!

ii) Antag att $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$ och $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$, vad är $\lim_{x\to 1} f(x)$?

Svar: Odefinierad!

Tankesätt: (Detta är inget bevis!) Vi vet att för alla tal x som är nära men större än 1 så är $f(x) \approx 2$ (det är ju detta som $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$ betyder) men för tal nära men mindre än 1 så gäller $f(x) \approx 1$ (vilket är betydelsen av $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$).

Naturligtvis så finns det då inget tal A så att $f(x)$ är nära det talet när x är nära 1 (vilket är betydelsen av $\lim_{x\to 1} f(x) = A$). Ett sådant tal skulle ju behöva uppfylla både $A = 2$ och $A = 1$.

Observera att detta resonemang bygger på tolkningar av definitioner!

Lösningsprincip: Gå till definitionen och tolka den!

iii) Om $\lim_{x\to 3} \frac{f(x)}{g(x)} = 2$ följer det då att $\lim_{x\to 3} f(x) = 2\lim_{x\to 3} g(x)$?

Svar: Nej!

Tankesätt: (Detta är inget bevis!) Om $\lim_{x\to 3} f(x) = 2A \neq 0$ och $\lim_{x\to 3} g(x) = A \neq 0$ så skulle $\lim_{x\to 3} \frac{f(x)}{g(x)} = 2$ enligt kvotregeln. Men kvotregeln antar att $\lim_{x\to 3} f(x) = 2A$ och $2\lim_{x\to 3} g(x) = A$. När vi vill visa motsatsen så vittnar det antagandet om vad som kan gå fel.

Vi vill konstruera ett motexempel och för det så räcker det med att välja en funktion $g(x)$ så att $\lim_{x\to 3} g(x)$ inte existerar, tex $g(x) = \cos(1/(x-3))$, och sen väljer vi $f(x) = 2g(x)$. Då är $f(x)/g(x) = 2$ men vi kan inte ens tillskriva $\lim_{x\to 3} f(x)$ eller $\lim_{x\to 3} g(x)$ några värden.

Lösningspricnip: Vi konstruerar ett motexempel. Men vi tittar även på på de antaganden vi gör i en sats. Ett bra sätt att se till att man förstår en sats är att ta bort ett antagande och försöka hitta ett motexempel till motsvarande sats utan det antagandet.

iv) Antag att det existerar ett $\delta > 0$ så att $|f(x) - \pi| < \frac{1}{100}$ för alla x så att $|x - 2| < \delta$. Följer det att det finns ett $\delta > 0$ så att $|f(x) - \pi| < \frac{1}{10}$ för alla x så att $|x - 2| < \delta$?

iv) Antag att det existerar ett $\delta > 0$ så att $|f(x) - \pi| < \frac{1}{100}$ för alla x så att $|x - 2| < \delta$. Följer det att det finns ett $\delta > 0$ så att $|f(x) - \pi| < \frac{1}{10}$ för alla x så att $|x - 2| < \delta$?

Svar: JA!

Tankesätt: (Detta är inget bevis!) Absolutbeloppet är ett avstånd. Så $|x - 2| < \delta \Rightarrow |f(x) - \pi| < \frac{1}{100}$ betyder att om x är nära 2 så är $f(x)$ nära π, inom 1/100 från π. Men om då måste ju $f(x)$ vara inom 1/10 från π.

Tänk den student som är inom 1/100 mil från puben ($f(x)$ avståndet från pubben som ligger på adressen π) när klockan är tillräckligt nära 2. Är det då inte uppenbart att han är inom 1/10 mil från puben då klockan är tillräckligt nära 2?

v) Antag att det existerar ett $\delta > 0$ så att $|f(x) - 3| < \frac{1}{100}$ för alla x så att $|x - 2| < \delta$. Följer det att det finns ett $\delta > 0$ så att $|f(x) - 2| < \frac{1}{10}$ för alla x så att $|x - 2| < \delta$?

Svar: Nej!

Tankesätt: (Detta är inget bevis!) Antag att samma student senare beslutar sig för att dricka på en annan pub som ligger på adressen 3. Antag att vi vet att han är inom 1/100 mil från pubben då klockan är nära 2. Dvs. om $|x - 2| < \delta$ så $|f(x) - 3| < \frac{1}{100}$. Kan han då vara inom 1/10 mil från en annan pub på adressen 2?

I andra ord, om Kalle alltid stapplar omkring inom hundra meter från konsulatet vid 2 tiden så kan han inte stappla omkring inom en kilometer från Mosebacke vid samma tid. Eftersom Mosebacke och konsulatet är mer än 1/100+1/10 mil ifrån varandra.

vi) Antag att det för varje $\delta > 0$ finns ett $\epsilon_\delta > 0$ så att $|f(x) + 2| < \epsilon_\delta$ för alla x så att $|x + 7| < \delta$. Följer det att $\lim_{x \to -7} f(x) = -2$?

Svar: Nej!

Tankesätt: (Detta är inget bevis!) Det är väldigt viktigt att vi först väljer ϵ och sen δ_ϵ i definitionen av gränsvärde. Om vi väljer δ först så kan vi, för varje begränsad funktion f, bara välja ϵ_δ =det största värdet $|f(x)+2|$ antar då $|x+7| < \delta$. Detta skulle innebära att alla begränsade funktioner är kontinuerliga!

Lösningspricnip: Gå till och tolka definitionen.

vii) Vilka av följande påståenden är sanna för varje funktion $f(x)$ definierad på de reella talen

a) $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ implicerar att $\lim_{x \to 0} f(2x) = 0$,
b) $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ implicerar att $\lim_{x \to \infty} f(2x) = 0$,
c) $\lim_{x \to 3} f(x) = 0$ implicerar att $\lim_{x \to 3} f(2x) = 0$?

Svar: a) Sann. b) Sann. c) Falsk, gör substitutionen $y = 2x$ så ser du att det sista gränsvärdet är $\lim_{y \to 6} f(y)$ och vi kan naturligtvis inte säga något om värdet av $f(x)$ då $x = 6$ utifrån att vi vet något om gränsvärdet då $x \to 3$.

Svar till Kortfrågor inför F6

i) Vi vet att, för säg alla $q > 0$ och $a > 1$, $\frac{x^q}{\ln(x)} \to \infty$ och att $\frac{a^x}{x^q} \to \infty$ då $x \to \infty$. Så x^q, växer mot oändligheten snabbare än $\ln(x)$ men a^x växer snabbare än x^q. Men vilken funktion, om någon, går mot oändligheten snabbast av alla funktioner?

Svar: Någon sådan funktion finns inte. Antag, för att hitta en motsägelse, att $f(x)$ växer snabbare än alla andra funktioner. Men då växer $xf(x)$ snabbare än $f(x)$ vilket motsäger att $f(x)$ växer snabbast.

ii) Antag att $f(x) > g(x)$ för alla $x \in (0, 1)$. Följer det att $\lim_{x\to 1^-} f(x) > \lim_{x\to 1^-} g(x)$?

Svar: Nej!

Tankesätt: (Detta är inget bevis!) Motexempel: $f(x) = 1-x$ och $g(x) = 0$. Om man tittar på satsen "Regeln för gränsövergång i olikhet" (Sats 5 på sidan 141 i Persson-Böjers) så ser man att det som skiljer den här uppgiften från satsen är att vi har "$<$" men satsen har "$\leq$". Man ska alltid, när man läser en sats, försöka se om de antaganden som görs är nödvändiga. Har man gjort det så blir den här uppgiften enkel.

Lösningspricnip: Vi tittar på en närliggande sats, hittar motexempel. Det kan även hjälpa att rita en graf.

iii) Antag att $\lim_{x\to 5} f(x) = 0$ följer det att $\lim_{x\to 5} \frac{1}{f(x)} = \infty$?

Svar: Nej. Om tex $f(x) = x - 5$ så kommer $\frac{1}{f(x)}$ inte att ha något gränsvärde då $x \to 5$ eftersom $\lim_{x\to 5^-} \frac{1}{f(x)} = -\infty$ men $\lim_{x\to 5^+} \frac{1}{f(x)} = \infty$.

iv) Antag att $\lim_{x\to 5} f(x) = \infty$ följer det att $\lim_{x\to 5} \frac{1}{f(x)} = 0$?

Svar: Ja! Att $f(x) \to \infty$ då $x \to 5$ betyder att det för varje $C > 0$, vi kan tex ta $C = \frac{1}{\epsilon}$ för varje $\epsilon > 0$, så existerar det ett $\delta > 0$ så att $|x - 5| < \delta$ implicerar att $f(x) > C = \frac{1}{\epsilon}$. Men detta implicerar att det för varje $\epsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ så att $|x - 5| < \delta$ implicerar att $0 < \frac{1}{f(x)} < \epsilon$ vilket implicerar att $\lim_{x\to 5} \frac{1}{f(x)} = 0$.

v) Antag att $f(x)$ är kontinuerlig på $[0, 1)$. Vilka av följande gränsvärden existerar garanterat:

a) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$?
b) $\lim_{x\to 1-} f(x)$?
c) $\lim_{x\to 1/2} f(x)$?
d) $\lim_{x\to 1/2} \frac{f(x)}{|f(x)|}$?

Svar: a) JA, b) NEJ, c) JA, d) NEJ

Tankesätt: (Detta är inget bevis!) Enligt definitionen för kontinuerliga funktionen så följer a) och c). För b) så hittar vi motexemplet $\cos(1/(x-1))$ (vi diskuterade detta noga på föreläsningen). I d) hittar vi motexemplet $f(x) = x - \frac{1}{2}$ vilket byter tecken i $x = 1/2$.

vi) Om $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$ vad är $\lim_{x\to c} \sin(f(x))$?

Svar: Vi kan inte avgöra. Det beror på $f(x)$.

Tankesätt: (Detta är inget bevis!) Om $f(x) = 1/|c - x|$ så är gränsvärdet odefinierat (gör substitutionen $t = 1/|c - x|$ i $\lim_{x\to c} \sin(f(x))$). Men om tex

$c = 0$ och
$$f(x) = 2\pi n \qquad \text{om } \frac{1}{n+1} < |x| \leq \frac{1}{n}$$
så kommer $\sin(f(x)) = 0$ och gränsvärdet existerar.

Detta kan vara lite knivigt att komma på första gången man ser det. Men egentligen så är det ganska enkelt vi vet att $\sin(2\pi n) = 0$ så det finns värden på x som går mot oändligheten och $\sin(x) = 0$ för de värdena så om värdemängden till f bara innehåller dessa värden så kommer $\sin(f(x)) = 0$.

På samma sätt så kan vi naturligtvis hitta funktioner $f(x)$ så att $\lim_{x\to c} \sin(f(x))$ så att gränsvärdet blir varje tal mellan -1 och 1.

vii) Antag att $f(x)$ och $g(x)$ är kontinuerliga på $[-3, \infty)$ vilka av följande gäller

a) $f(x) + g(x)$ är kontinuerlig.
b) $f(x)g(x)$ är kontinuerlig.
c) $\frac{f(x)}{g(x)}$ är kontinuerlig.

Svar: a) och b) är sanna c) är falsk

Tankesätt: (Detta är inget bevis!) a) och b) följer av, vad som borde vara en sats men istället är, de första stycket på sidan 150 i Persson-Böjers. Del c) är falsk om $f(x) = 0$ för något x.

Allmänt om kortfrågor: Kortfrågorna är ett viktigt sätt för er att engagera matematiken. De kommer att dyka upp på kontrollskrivningar. Syftet är att ni ska gå till definitionerna, gå till satserna och försöka lära er tänka på dessa på ett intuitivt sätt. Jag tror inte att det finns en given mängd regler för att lösa dessa uppgifter. Men vissa angreppssätt är förekommer ofta.

Det första är att gå till definitionerna och se vad koncepten vi använder betyder - vissa konceptuppgifter följer av en direkt tillämpning av definitionerna.

Det andra angreppssättet är att titta på de satser vi bevisar eller står i boken. Ofta finns det en sats som säger något liknande (eller omvänt) som kortuppgiften. Om vi förstår satserna och alla antaganden som görs och varför de görs så kommer vi att kunna lösa dessa konceptuppgifter.

Det tredje är att skapa ett motexempel. Ofta så bygger motexemplet på satser och satserna ger en indikation på hur motexemplet skall konstrueras. Satserna är sanna så motexemplet måste rikta in sig på det som saknas i kortuppgiften men finns med som antagande i satsen.

Det fjärde angreppssättet är att skissa en graf. En graf kan säga mer än 1000 ord!

Det sista angreppssättet är att försöka tolka ekvationerna intuitivt. Det mesta i den matematiska analysen är utvecklat för att används i fysiken så om vi förstår en tillämpning (i form av avstånd eller hur en graf ritas) så kan vi förstå problemet.

Nu följer svaren på bevisuppgifterna. Jag skall säga direkt att om ni inte har gjort bevisuppgifterna så är det ingen ide att läsa svaren. Poängen med uppgifterna är att ni ska få träna på att skriva och göra egna bevis. Svaret är till för att se hur motsvarande utsaga kan bevisas. Det kan vara till stor hjälp om man har försökt själv ett tag men kört fast. Har man inte försökt själv så är det dock bättre att studera bevisen i boken - de satserna är i regel viktigare än de “tränings satser” som jag hittar på.

6: Bevisuppgift 1: Bevisa att exponentialfunktionen a^x definierad för alla $x \in \mathbb{Q}$ är strikt växande i x om $a > 1$.

Svar: Vi börjar med att visa följande hjälpsats

Hjälpsats 1. *Antag att $a > 1$ och $\alpha, \gamma \in \mathbb{N}$ då kommer*

$$a^\alpha > a^\gamma \text{ om och endast om } \alpha > \gamma.$$

På samma sätt så gäller det att om $b < 1$ och $\alpha, \gamma \in \mathbb{N}$ då kommer

$$b^\alpha < b^\gamma \text{ om och endast om } \alpha > \gamma.$$

Bevis: Observera att om $a > 1$ så kommer $(a-1) > 0$ och $a(a-1) > 0$. Det följer därför att

$$a > 1 \Rightarrow a(a-1)+a > 1 \Rightarrow a^2 > 1 \Rightarrow a^2(a-1)+a^2 > 1 \Rightarrow a^3 > 1 \Rightarrow ... \Rightarrow a^\kappa > 1 \quad (1)$$

för alla $\kappa \in \mathbb{N}$. Observera att vi bara använder att om $k > l$ och $m > 0$ så $k + m > l$ i härledningen (1)

Om $\alpha > \gamma$ så finns det ett $\kappa \in \mathbb{N}$ så att $\kappa > 0$ och $\alpha = \gamma + \kappa$. Vidare så gäller, enligt (1), $a^\kappa > 1$ vilket implicerar att $a^\kappa - 1 > 0$ vilket implicerar att $a^\gamma(a^\kappa - 1) > 0$ eftersom $a^\gamma > 1 > 0$. Det följer att $a^\alpha - a^\gamma > 0$ vilket bevisar att om $\alpha > \gamma$ så är $a^\alpha > a^\gamma$.

Att $a^\alpha < a^\gamma$ implicerar $\alpha < \gamma$ om $a > 1$ följer nu enkelt. För om det vore så att $\gamma \geq \alpha$ så skulle $a^\alpha \leq a^\gamma$.

För att visa den andra delen av satsen så behöver man bara applicera satsen på $a = 1/b > 1$ om $b < 1$ vilket ger

$$\left(\frac{1}{b}\right)^\alpha > \left(\frac{1}{b}\right)^\gamma \text{ om och endast om } \alpha > \gamma.$$

vilket är samma sak som satsens andra påstående. □

Vi vill bevisa att om $a > 1$ och $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\gamma}{\delta}$ för några $\alpha, \gamma \in \mathbb{Z}$ och $\beta, \delta \in \mathbb{N}$ så kommer $a^{\alpha/\beta} > a^{\gamma/\delta}$. Vi kommer att visa detta i ett par enkla steg.

Steg 1: *Om $a > 1$ och $\delta \in \mathbb{N}$ så kommer $a^{1/\delta} > 1$.*

Bevis steg 1: Låt oss kalla $b = a^{1/\delta}$ då kommer $b^\delta = a > 1 = \left(a^0\right)^\delta$. Så enligt hjälpsatsen så kommer $b > 1$.

Steg 2: Om $a > 0$ och $q \in$ så kommer $a^q > 1$ för $q > 0$ och $0 < a^q < 1$ för $q < 0$.

Bevis steg 2: Vi skriver $q = \gamma/\delta$ där $\gamma \in \mathbb{Z}$ och $\delta \in \mathbb{N}$. Då gäller $a^q = \left(a^{1/\delta}\right)^\gamma$. Vi vet från steg 1 att $b = a^{1/\delta} > 1$ så om $\gamma > 0$ så följer det att $a^q = \left(a^{1/\delta}\right)^\gamma = b^\gamma > 1$ enligt hjälpsatsen. Om $\gamma < 0$ så skriver vi om $\gamma = -|\gamma|$ och beräknar $a^q = \left(a^{1/\delta}\right)^{-|\gamma|} = \left(\frac{1}{b}\right)^{|\gamma|} < 1$ eftersom $1/b < 1$.

Steg 3: Vi vill visa att $a^{\frac{\alpha}{\beta}} > a^{\frac{\gamma}{\delta}}$ om $a > 1$ och $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\gamma}{\delta}$. Vi vet från steg 2 att $a^{\frac{\gamma}{\delta}} > 0$ så vi kan multiplicera olikheten med $a^{-\frac{\gamma}{\delta}}$. Vi får således

$$a^{\frac{\alpha}{\beta}} > a^{\frac{\gamma}{\delta}} a^{\frac{\alpha\delta - \gamma\beta}{\beta}} > 1.$$

Men om $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\gamma}{\delta}$ så är $\frac{\alpha\delta - \gamma\beta}{\beta} > 0$ så enligt steg 2 så är $a^{\frac{\alpha\delta - \gamma\beta}{\beta}} > 1$ vilket skulle bevisas. □

En ursäkt: Den här frågan visade sig vara lite mer teknisk än vad jag hade tänkt mig... Hoppas att ingen spenderade allt för mycket tid på den.

7: Bevisuppgift 2 (svår). Bevisa att om $a > 1$ så är kommer funktionen $f(n) = (a)^{1/n}$ som är definierad från $\mathbb{N}$ till $\mathbb{R}$ att satisfiera följande: $\lim_{n\to\infty} f(n) = 1$ utan att använda att exponentialfunktionen är kontinuerlig. Med andra ord: bevisa att $\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$.

Förslagsvis så använder gör du ditt bevis i följande steg:

1. Drag slutsatsen att $a^{1/n} > 1$, dvs $a^{1/n} - 1 > 0$.
2. Definiera $a_n = a^{1/n} - 1$ och visa att $a^{1/n} \to 1$ om och endast om $a_n \to 0$
3. Visa att $a = (1 + a_n)^n$, använd sedan binomialsatsen för att visa att $0 < a_n < \frac{a-1}{n}$.
4. Använd föregående steg till att visa att $a_n \to 0$.

Bevisa sedan att a^x är kontinuerlig på $\mathbb{Q}$. LEDTRÅD: *Du måste visa att* $\lim_{x\to x_0}(a^x - a^{x_0}) = \lim_{h\to 0}\left(a^{x_0+h} - a^{x_0}\right) = 0$ *för alla* $x_0 \in \mathbb{Q}$.

En sketch av ett svar:

1. Det första steget är enkelt. Om $a^{1/n} \leq 1$ så skulle $a^{2/n} \leq 1$ så skulle... $a = a^{n/n} \leq 1$ men vi antar att $a > 1$.
2. Om man skriver upp definitionerna av $a_n \to 0$ och $a^{1/n} \to 1$ bredvid varandra så ser man att de är exakt samma villkår som ska uppfyllas.
3. Observera att
$$(1 + a_n)^n = \left(1 + a^{1/n} - 1\right)^n = \left(a^{1/n}\right)^n = a,$$
där vi använde definitionen av a_n i det första steget.
Enligt binomialsatsen så är
$$(1 + a_n)^n \geq 1 + na_n \Rightarrow a \geq 1 - na_n \Rightarrow a_n < \frac{a-1}{n}.$$
Eftersom $a_n > 0$ enligt steg 1 så följer det att $0 < a_n < \frac{a-1}{n}$.
4. Instängningsregeln tillsammans med standardgränsvärdet $\frac{1}{n} \to 0$ implicerar att $a_n \to 0$. Men enligt steg 2 så är det samma sak som $a^{1/n} \to 1$. Vi har därmed bevisat satsen. $\square$

Sketch av ett bevis för kontinuitet: Vi ska bevisa att $\lim_{h\to 0} a^{x_0+h} = a^{x_0}$ vilket är samma sak som att bevisa att $\lim_{h\to 0}\left(a^{x_0+h} - a^{x_0}\right) = a^{x_0}\lim_{h\to 0}\left(a^h - 1\right) = 0$. Vi måste således bevisa att det för varje $\epsilon > 0$ finns ett $\delta_\epsilon > 0$ så att
$$\left|a^h - 1\right| < \epsilon \text{ för alla } |h| < \delta.$$
Men enligt föregående resonemang så finns det ett $N_\epsilon > 0$ så att
$$\left|a^{1/n} - 1\right| < \epsilon \text{ för alla } n > N_\epsilon.$$
Men eftersom a^x är växande i x så följer det att om $|h| < \frac{1}{N_\epsilon}$ så kommer
$$\left|a^h - 1\right| < \epsilon.$$