Svar till vissa uppgifter från den fjärde veckan.

Svar tillKortfrågor inför F7:

i) Antar följande funktioner sitt maxima
a) $f(x)$ är kontinuerlig och strikt växande på $[2,7[$?
b) $f(x)$ är kontinuerlig och strikt avtagande på $[2,7[$?

Svar: Bara b. Eftersom funktionen i a är strikt växande så kommer $\lim_{x\to 7^-} f(x) > f(y)$ för alla $y \in [2,7[$. Men $x = 7$ ligger inte i intervallet. Ett exempel på en funktion som i a är $f(x) = x$. Maxvärdet är naturligtvis 7 men det finns inget $x \in [2,7[$ så att $f(x) = 7$. Fallet i b är analogt.

ii) Låt x_k vara en talföljd på $\mathbb{R}$ finns det något tal $y \in \mathbb{R}$ och en delföljd x_{k_j} så att $\lim_{j\to\infty} x_{k_j} = y$?

Svar: Nej! Den här uppgiften är givetvis en uppgift för att kontrollera om alla antaganden i Bolzano-Weierstrass sats är nödvändiga. Men om $x_k = k$ så kommer ingen delföljd av x_k att konvergera. Vi ser därdör att antagandet att intervallet är begränsat är nödvändigt i Bolzano-Weierstrass sats.

iii) Om $f(x)$ och $g(x)$ är funktioner definierade på $[0,1]$ vilka av följande garanterar att $f(x) = g(x)$ har en lösning? Vilka utesluter möjligheten till en lösning?
a) $f(x)$ och $g(x)$ är kontinuerliga och $f(0) < g(0)$ och $f(1) \geq g(1)$?
b) $f(x)$ är kontinuerlig och $f(0) < g(0)$ och $f(1) \geq g(1)$?
c) $f(x)$ är kontinuerlig och $g(x)$ är växande och $f(0) < g(0)$ och $f(1) \geq g(1)$?

Svar: a) garanterar en lösning. (Detta följer av satsen om mellanliggande värden - och uppgiften är skriven för att ni skall tänka på den satsen.)

b) Nej. Konstruera gärna ett motexempel, observera att g kan inte vara kontinuerlig. Detta visar att kontinuitet är nödvändigt i satsen om mellanliggande värden.

c) Ja, men den är lite knepig.

iv) Ge ett exempel på en funktion som är kontinuerlig på sin definitionsmängd men inte likformigt kontinuerlig.

Svar: Tex $\frac{1}{x}$ definierad på $]0,1]$. Observera att detta visar att intervallet är slutet är ett nödvändigt antagande i satsen om likformighet. Motexemplet e^x på $\mathbb{R}$ visar att intervallet är begränsat också är nödvändigt. Bevisa gärna att dessa funktioner inte är likformigt kontinuerliga.

v) Vi vet att om $f(x)$ är kontinuerlig på ett slutet begränsat intervall $[a,b]$ så är $f(x)$ likformigt kontinuerlig på $[a,b]$ men finns det funktioner som är likformigt kontinuerliga på hela $\mathbb{R}$?

Svar: Se föregående uppgift.

Svar till Kortfrågor inför F8

i) Vilka av följande serier är konvergenta:
a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$?   **b)** $\sum_{k=1}^{\infty} a^k$?
c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$?
Svar:
a) Nej! Serien kallas för den harmoniska serien och den är inte konvergent.

b) Om $|a| < 1$ men inte annars. Om $|a| < 1$ så är det en geometrisk serie och konvergens följer. Om $|a| \geq 1$ så kommer inte a^k att gå till noll då $k \to \infty$ så serien kan inte vara konvergent.

c) Ja!

ii) Om $f(x)$ antar sitt minimum på $[-1, 1]$ kommer $f(x)^2$ att antaga sitt maximum på $[-1, 1]$?

Svar: Nej. Försök skapa ett motexempel.

iii) Har sekvensen $\sin(1), \sin(2^2), \sin 3^2, ..., \sin(k^2), ...$ en konvergent delföljd?

Svar: Ja, följer direkt av Bolzano-Weierstrass sats. Men det är väldigt svårt att hitta delföljden explicit.

iv) På något sätt så har en badboll (med diameter 1 meter) fastnat och blockerat den 8706551 meter långa öst-västliga pipelinen från Xinjiang till Shanghai. Det enda sättet som huvudingengören kan komma på att hitta badbollen är att såga av pipelinen i mitten och kolla vilken halva som är blockerad, såga av den halvan på mitten och så vidare tills han till sist hittar badbollen (genom att såga igenom den). Hitta ett ungefärligt uttryck för hur många gånger han som mest behöver såga av pipelinen innan han hittar badbollen? Vad har detta att göra med Bolzano-Weiersrass Sats?[1]

Svar: Ca ${}^2\log(8706551)$ gånger. Intervallhalveringen är kärnan på Bolzano-Weierstrass. Den hjälper oss att hitta en punkt såsom en skärningspunkt, eller ett maxima.

6: Bevisuppgift 1: Jag ahr tyvärr inte tid att skriva något svar den här veckan. Jag vet att den är ganska komplex och förtjänar ett svar, men den ligger lite bortanför kursen så ni kommer inte att missa något till tentan för att ni inte ser något svar till bevisuppfgifterna.

[1] Okay, det är en löjlig fråga. Men den har en poäng.