Svar till vissa uppgifter från den femte veckan.

Svar tillKortfrågor inför F7:

i) Skissa en graf av en funktion $f(x)$ på $[0, 3]$ som är deriverbar överallt utom i punkterna $x = 1$ och $x = 2$.

Svar: Ta tex en funktion som är diskontinuerlig i $x = 1$ och $x = 2$

ii) Om $f \geq g$ följer det att $f' \geq g'$?

Svar: Nej, ta tex $f = 0$ och $g = -e^{-x}$.

iii) Antag att $f(x)$ är kontinuerlig i en punkt x^0. följer det att f är deriverbar i x^0?

Svar: Nej. tex så är $|x|$ kontinuerlig men inte deriverbar i $x^0 = 0$. Den här frågan visar att det omvända till satsen som säger att deriverbar implicerar kontinuerlig inte är sann.

iv) Låt $f(x)$ och $g(x)$ vara deriverbara i $[-1, 1]$, låt $h(x) = \max(f(x), g(x))$. Vad är $h'(x)$ uttryckt i f, g, f' och g'?

Svar:

$$h'(x) = \begin{cases} f'(x) & \text{om } f(x) > g(x) \\ g'(x) & \text{om } g(x) > f(x) \\ f'(x) = g'(x) & \text{om } f(x) = g(x) \text{ och } f'(x) = g'(x) \\ \text{odefinierad} & \text{om } f(x) = g(x) \text{ och } f'(x) \neq g'(x). \end{cases}$$

Rita en graf av situationen så kommer du att se varför.

v) Skissa en funktion $f(x)$ som har ett lokalt maximum i $x = 0$ men inte är deriverbar i $x = 0$.

Svar: Rita grafen till $-|x|$. Det viktiga med den här uppgiften, som så många andra, är att den visar hur antaganden och satser är beroende av varandra. En funktion kan ha ett lokalt maximum i en inre punkt även om derivatan i punkten inte är noll - men då är derivatan inte definierad i den punkten.

vi) Antag att $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, $f(x_0) = h(x_0)$, $f'(x_0)$ och $h'(x_0)$ existerar. Kan vi dra slutsatsen att $g'(x_0)$ existerar?

Svar: Ja. Det här är en variant av instängningsregeln för deriverbara funktioner. Rita en graf.

vii) Låt $f(x)$ vara en deriverbar funktion på $[-1, 1]$. Existerar det någon funktion g så att $g'(x) = f'(x)$ och $g(0) = 0$?

Svar: Ja, den funktionen är $f(x) - f(0)$ vilket enkelt verifieras.

Svar till Kortfrågor inför F10

i) Finns det någon funktion $f(x)$ definierad på $[0, 1]$ så att $f'(x) \geq 0$ för alla x och f är växande? Är alla sådana f strikt växande?

Svar: Ja, alla funktioner med icke negativ derivata är växande. Dock så är de inte strikt växande som exemplet $f(x) = 1$ visar.

ii) Om $f'(x) > g'(x)$ för alla x följer det att $f(x) > g(x)$?

Svar: Nej.

iii) Om $f(x) > 0$ finns det någon funktion g så att $\frac{df(x)g(x)}{dx} = \sin(2x)$?

Svar: Ja, tex så är $g(x) = \frac{-\cos(2x)}{2f(x)}$ en sådan funktion.

iv) Antag att f och g är deriverbara funktioner så att $f(x) \geq g(x)$ för alla x och för någon punkt x_0 så gäller $f(x_0) = g(x_0)$. Vad kan man säga om relationen mellan derivatorna $f'(x_0)$ och $g'(x_0)$?

Svar: Ja, de måste vara lika.

v) Antag att $f(x)$ är deriverbar på $[0, \infty)$ och att $f'(x) \geq 1$. Kommer $f(x) \to \infty$ då $x \to \infty$?

Svar: Ja. Låt $g(x) = f(x) - x$ då är $g'(x) \geq 0$ så $g(x)$ är växande. Det innebär att $f(x) - x \geq f(0)$ eller att $f(x) \geq f(0) + x \to \infty$ då $x \to \infty$.

vi) Antag att $f(x)$ och $g(x)$ är deriverbara på $[0, \infty)$, $f'(x) \geq 1$ och $g'(x) = 2f'(x)$. Vad är $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$?

Svar: $\frac{1}{2}$.