Svar till vissa uppgifter från den femte veckan.

Kortfrågor: Eftersom vi ligger efter så hade lappen för vecka 6 inga kortfrågor.

6 Bevisuppgift: Låt a_k vara en talföljd. Visa att om $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ är konvergent så är $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent.

Bevis: Vi skriver

$$a_k^+ = \begin{cases} a_k & \text{om } a_k \geq 0 \\ 0 & \text{om } a_k < 0 \end{cases}$$

och

$$a_k^- = \begin{cases} -a_k & \text{om } a_k \leq 0 \\ 0 & \text{om } a_k > 0 \end{cases}$$

då är $a_k^{\pm} \geq 0$ och $a_k = a_k^+ - a_k^-$. Speciellt så uppfyller delsumman

$$S_j = \sum_{k=1}^{j} a_k = \underbrace{\sum_{k=1}^{j} a_k^+}_{\text{definiera som } S_j^+} - \underbrace{\sum_{k=1}^{j} a_k^-}_{\text{definiera som } S_j^-} = S_j^+ + S_j^-.$$

Så enligt summa regeln så kommer $S_j = S_j^+ - S_j^-$ att vara konvergent om S_j^+ och S_j^- är det.

Eftersom $a_k^{\pm} \leq |a_k|$ så gäller

$$S_j^{\pm} = \sum_{k=1}^{j} a_k^{\pm} \leq \sum_{k=1}^{j} |a_k| \leq \lim_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = M$$

för alla j, där vi också använde att $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ är konvergent enligt antagande.

Det följer att $a_k^{\pm}$ är icke negativa (dvs $S_j^{\pm}$ är växande) och att $S_j^{\pm}$ är begränsade så $S_j^{\pm} \to S^{\pm}$ enligt sats.

Vi har därför bevisat att

$$\lim_{j\to\infty} S_j = \lim_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{j} a_k = \lim_{j\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{j} a_k^+ - \sum_{k=1}^{j} a_k^- \right) =$$

$$\lim_{j\to\infty} \left(S_j^+ - S_j^- \right) = \left\{ \begin{array}{c} \text{summa} \\ \text{regeln} \end{array} \right\} = \lim_{j\to\infty} S_j^+ - \lim_{j\to\infty} S_j^- = S^+ - S^-.$$

Detta avslutar vårt bevis. $\square$