# Svar till vissa uppgifter från den sjunde veckan, dvs vecka 42.

**2 (Svar till kortfrågor inför F13):**

*i)* Rita en sketch av Newton-Rappsons metod för en konvex funktion $f(x)$. Kan man dra slutsatsen att lösningsapproximationerna $x_2, x_3, x_4, \ldots$ är antingen ökande eller minskande?

**Svar:** Se avsnitt 4.5 i Persson-Böiers.

*ii)* Kan en konvex funktion $f(x)$ ha en inflexionspunkt?

**Svar:** Ja. Betrakta

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{om } x \leq 0 \\ 0 & \text{om } x > 0. \end{cases}$$

Då är origo en inflexionspunkt. Svaret blir nej om $f(x)$ antas vara strikt konvex.

*iii)* Ge ett allmänt uttryck för alla funktioner som är samtidigt konvexa och konkava.

**Svar:** $ax + b$ för $a, b \in \mathbb{R}$

*iv)* Antag att $ax^3 + bx^2 + cx + d$ är en konvex funktion på $\mathbb{R}$. Vad är $a$?

**Svar:** $a = 0$. Om $a \neq 0$ så är $f''(x) = 6ax + 2b$ vilken är negativ om $x$ är tillräkligt stort (om $a < 0$) eller tillräkligt litet (om $a < 0$). Så det enda värdet på $a$ som garanterar att $f$ är konvex är $a = 0$.

**4 (Svar till kortfrågor inför F14):**

*i)* Om $f(x) \geq 0$ kommer $\int f(x)dx$ att vara växande?

**Svar:** Ja, i alla fall om den primitiva funktionen är definierad! Eftersom $\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$ så kommer derivatan av integralen att vara större än eller lika med noll vilket implicerar att funktionen är växande.

*ii)* Om $f(x)$ är deriverbar och avtagande kommer $\int f(x)dx$ att vara konvex?

**Svar:** Endast om $f(x)$ är konstant. Observera att $\frac{d^2}{dx^2}\int f(x)dx = f'(x) \leq 0$, där den sista olikheten följer av att $f$ är avtagande. Men två gånger deriverbara konvexa funktioner har icke negativa derivator. Så om $f$ inte är konstant så finns det en punkt där $\frac{d^2}{dx^2}\int f(x)dx < 0$.

*iii)* Om $\int f(x)dx$ är konstant kommer $f'(x) = 0$?

**Svar:** Ja, faktum är att $f(x) = 0$ om integralen är konstant.

*iv)* Jag har tidigare sagt att om vi vet något om en funktion så vet vi något om inversen. Nu så är derivatan invers till den primitiva funktionen. Vilka regler för derivatan motsvarar partiell integration och variabelsubstitution?

**Svar:** Kedjeregeln $\Rightarrow$ variabelsubstitution, produktregeln för derivator $\Rightarrow$ partiell integration.

*v)* Kan en funktion ha oändligt många lokala maximum punkter?

**Svar:** Ja, tex $\sin(x)$ definierad på $\mathbb{R}$ har ett lokalt maximum (och även globalt maximum) i $2\pi n$ för alla $n$. Även om vi tittar på ett begränsat intervall såsom $[0, 1]$ så har

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{om } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{om } x = 0. \end{cases}$$

lokala extremvärden i $x = \frac{1}{2\pi n}$ för $n = 1, 2, 3, ....$ Kan du komma på en kontinuerlig funktion på $[0, 1]$ som har oändligt många lokala extremvärden?