Svar till vissa uppgifter från den åttonde veckan, dvs vecka 45.

1 (Svar till kortfrågor inför F17):

i) Om $f(x)$ är begränsad kommer $\int f(x)dx$ att vara kontinuerlig? Deriverbar?

Svar: Per definition så är derivatan av $\int f(x)dx$ lika med $f(x)$ så den existerar. Eftersom derivatan existerar så är den primitiva funktionen kontinuerlig. Men när vi börjar tala om integraler så kommer vi att ha vissa integrerbara funktioner vars integral inte är deriverbar. Men om f är begränsad så kommer integralen alltid att vara kontinuerlig.

ii) Låt $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{om } x \text{ är rationellt} \\ 0 & \text{om } x \text{ inte är rationellt} \end{array} \right\}$ kommer $f(x)$ att vara Riemann integrerbar?

Svar: Nej.

iii) Är $f(x) = e^{\cos(x)x^x} - 718\cos(\sin(x))4^{38+x^{918}}$ integrerbar på intervallet $[-10^{10}, 10^{20^{30}}]$.

Svar: Ja, kontinuerliga funktioner är integrerbara på slutna begränsade intervall.

iv) Låt $f(x)$ vara en begränsad funktion på intervallet $[-3, 3]$ och $\Psi_k(x)$ en sekvens trappfunktioner så att $\Psi_0(x) \leq \Psi_1(x) \leq \Psi_2(x) \leq ... \leq f(x)$. Kommer $\lim_{k\to\infty} \int_{-3}^{3} \Psi_k(x)dx$ att konvergera?

Svar: Ja. Eftersom Ψ_k är en växande sekvens så kommer deras integraler att forma en växande sekvens av tal. Då $f(x)$ är begränsad så kommer integralerna av Ψ_k att vara begränsade. Ökande begränsade sekvenser konvergerar enl kompletthetsaxiomet.

v) Finns det någon funktion $f(x)$ som är definierad på $[0, 1[$ och $\lim_{x\to 0^-} f(x) \to \infty$ men $f(x)$ är Riemann integrerbar? Kan du beräkna $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx$? Reflektera!

Svar: Nej.

2 (Svar till kortfrågor inför F18):

i) Kommer $\lim_{t\to y} \left[\frac{d}{dt}\int_0^{\sin(t)} \arcsin(x)dx\right] = y\cos(y)$ för alla $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$?

Svar: Ja (Enligt definitionen av primitiv funktion, om vi tar hänsyn till den inre derivatan (kedjeregeln).)

ii) Om $f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{för } x \neq 0 \\ 1 & \text{för } x = 0 \end{cases}$ kommer då $f'(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{för } x \neq 0 \\ 0 & \text{för } x = 0 \end{cases}$?

Svar: Nej! (Observera att f är diskontinuerlig i $x = 0$ så f är inte deriverbar i $x = 0$. Rätt derivata är därför $f'(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{för } x \neq 0 \\ \text{odefinierad} & \text{för } x = 0 \end{cases}$)

iii) Antag att $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -1$ och $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$ för någon integrerbar funktion $f(x)$ definierad på $[0,2]$. Vad är $\lim_{\epsilon \to 0} \int_{1-\epsilon}^{1+\epsilon} f(x)dx$?

Svar: 0 (Observera att vi beräknar ytan av ett område som har basen $2\epsilon \to 0$. Eftersom höger och vänstergränsvärdet existerar så är f begränsad när $x \approx 0$.)

iv) Vad är $\lim_{x\to\infty} \int_x^{x+1} e^{\frac{t^2-1}{t^2}} dt$?

Svar: e (Observera att $e^{\frac{t^2-1}{t^2}} \to 1$ då $t \to \infty$.)

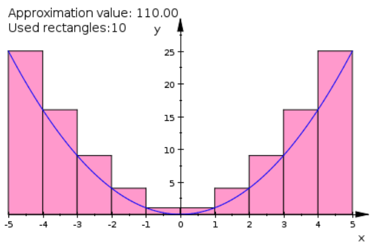
v) Vad är $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \arctan x dx$?

Svar: $\pi/2$ (Den här är lite knepigare. Men i om vi gör variabelbytet $y = x/T$ så får vi $\lim_{T\to\infty} \int_0^1 \arctan(Ty)dy$ och för varje $y > 0$ så kommer $\arctan(Ty) \to \frac{\pi}{2}$ då $T \to \infty$.)

7: Bevisuppgift: (Jag erkänner, jag är för lat för att skriva en ny uppgift. Så jag återanvänder en uppgift som jag använde i England förra året.)

In this exercise we will calculate the integral $\int_0^t ax^2 dx$ from first principles.

1. Draw the graph of $y = ax^2$, for $0 \le x \le t$ and $a > 0$, as in the picture below ($a = 1$, $t = 5$ in the picture). Also draw n rectangles with base= $\frac{t}{n}$ as in the picture ($n = 10$ in the picture we are however only interested in the 5 rectangles to the right of the $y-$axis).



2. Conclude that the area under the graph $y = ax^2$, $0 \le x \le t$ is estimated from above by

$$A \le \sum_{k=1}^{n} a \left(\frac{kt}{n}\right)^2 \times \frac{t}{n} = at^3 \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2, \tag{1}$$

where A denotes the area and each term in the sum is the area of one rectangle (base times height).

3. Redraw the diagram but this time with the rectangles underneath the graph and argue that

$$A \ge at^3 \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n-1} k^2. \tag{2}$$

4. Use induction to show that

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

5. Let $n \to \infty$ in (1) and (2) and conclude that the area under the graph is $A = a\frac{t^3}{3}$. That is
$$\int_0^t ax^2 dx = a\frac{t^3}{3}.$$

Solution:

1. Explained in the question.
2. Clearly the area of the sum of the area of the rectangles is larger than the area under the graph. The area of the k :th rectangle is $\frac{t}{n} \times \left(\frac{kt}{n}\right)^2 = \frac{k^2t^3}{n^3}$. Summing over the n rectangles gives the result.
3. As in the previous step.
4. The equality is clearly true for $n = 1$. Assume that it is true for n. Then
$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n+1} k^2 + (n+1)^2 = \left\{ \begin{array}{c} \text{induction} \\ \text{hypoth.} \end{array} \right\} =$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6},$$
where the last equality follows from some tedious algebra. So the equality holds by induction.
5. We have thus shown that
$$\frac{at^3}{n^3} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \le A \le \frac{at^3}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2. \tag{3}$$
Using the identity in the previous step we can calculate
$$\frac{at^3}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{at^3}{3} + \frac{at^3}{2n} + \frac{at^3}{6n^2} \to \frac{at^3}{3} \text{ as } n \to \infty.,$$
where we have used the sum rule and that $\frac{1}{n^p} \to 0$ for $p = 1, 2$.
Similarly,
$$\frac{at^3}{n^3} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{at^3}{3} - \frac{at^3}{2n} + \frac{at^3}{6n^2} \to \frac{at^3}{3} \text{ as } n \to \infty.$$
If we consider A to be a constant sequence then (3) and the sandwich theorem implies that $A \to \frac{at^3}{3}$, but A is a constant so that is equivalent to $A = \frac{at^3}{3}$.

Remark: This might appear to be a long and complicated way to evaluate $\int_0^t ax^2dx$ which we already know to be $\frac{at^3}{3}$. But, as mathematicians, we have to ask where we got the rule $\int_0^t x^2dx = \frac{t^3}{3}$ from. In reality all the rules you know for integration from your A-level maths comes from calculations with limits of sums as in the example above. It is just that we tend to forget where the rules we use comes from.