Svar till vissa uppgifter från den nionde veckan, dvs vecka 46.

1 (Svar till kortfrågor inför F19):

i) Om $f(x)$ är kontinuerlig på $[0,1]$ kan man då skriva $\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{k}f(n/k)$ på ett enklare sätt?

Svar: Ja, detta är $\int_0^1 f(x)dx$. (Rita en bild med grafen av $f(x)$ och varje term i summan $\sum_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{k}f(n/k)$ som en rektangel med bas $[(n-1)/k, n/k]$ och höjd $f(n/k)$ om k är hyfsat stort, säg $k=10$, så blir det intuitivt klart att summan approximerar ytan under grafen.)

ii) Om $f(x)$ är kontinuerlig på $[-1,1]$ och $-1 = x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_n < x_{n+1} ... < 1$ är punkter så att $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$ kommer då $\sum_{n=1}^{\infty}|x_{n+1} - x_n|f(x_n) = \int_{-1}^{1} f(x)dx$?

Svar: Nej. (Den här är lite knepig förstod jag när vi diskuterade den på föreläsningen. Men för att en uppdelning $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ ska ge en bra approximation till $\int_a^b f(x)dx$ så måste avståndet mellan x_j och x_{j+1} vara litet för alla j. Men om sekvensen i uppgiften är tex $x_j = 1 - 1/j$ för $j \in \mathbb{N}$ och $x_0 = -1$ så kommer vi bara att ha ett intervall i området $[-1,0]$. Rita gärna grafen av $f(x)$ och ytan $\sum_{n=1}^{\infty}|x_{n+1} - x_n|f(x_n)$. Då kommer du att se att Ψ är en dålig approximation av $f(x)$ om $f(x)$ inte $f(x)$ är nästan konstant i $[-1,0]$)

iii) Om $f(x)$ är kontinuerlig på $[0,\infty]$ kommer då $\int_0^{\infty} f(x)dx$ att existera? Kommer, för varje tal $a, b \in \mathbb{R}$, $b > a \geq 0$, $\int_a^b f(x)dx$ att existera?

Svar: $\int_0^{\infty} f(x)dx$ existerar inte som en generaliserad integral i allmänhet (ta tex $f(x) = 1$ vilken är kontinuerlig men $\lim_X \to \infty \int_0^X f(x)dx$ divergerar). Att $\int_a^b f(x)dx$ existerar följer direkt av a att $f(x)$ är kontinuerlig (Sats i boken).

iv) Låt $f_1, f_2, f_3, ...$ vara en oändlig mängd kontinuerliga funktioner definierade på $[0,1]$, kommer då $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx$?

Svar: Nej. (Det här är en lite elak uppgift då den går lite utanför kursen men jag ville ha med den för att visa att det finns mer att göra i analysen. Vi har visat att det finns en relation mellan derivatan och integralen - men det finns många andra relationer att undersöka: tex. när man har rätt att byta ordning på oändliga serier och integraltecknet. Här så skulle vi kunna tänka oss att $f_n(x) = \cos(x/\pi)$ för alla n. Då är $\int_0^1 f_n(x)dx = 0$ för alla n men summan till höger blir $\sum_{n=1}^{\infty}\cos(x/\pi)$ vilken naturligtvis divergerar för alla $x \neq 1/2$ så summan (och således integralen) till höger är inte meningsfull.)

v) Om $f(x)$ är integrerbar och begränsad på $[-5,5]$ finns det då ett tal c så att $10c = \int_{-5}^{5} f(x)dx$? Finns det ett $x_c \in [-5,5]$ så att $f(x_c) = c$?

Svar: Absolut, $c = \frac{1}{10}\int_{-5}^{5} f(x)dx$. Det finns dock inte nödvändigtvis något x_c så att $f(x_c) = c$. För det behövs kontinuitet. Ett motexempel skulle vara $f(x) = -1$ för $x < 0$ och $f(x) = 1$ för $x > 0$ då är $c = 0$ men $f(x) \neq 0$

för alla x. Observera att detta innebär att antagandet att $f(x)$ är kontinuerlig i integralkalkylens medelvärdessats är nödvändigt. Och eftersom vi använder integralkalkylens medelvärdessats i beviset av analysens huvudsats så är kontinuitetsantagandet nödvändigt även där.

2 (Svar till kortfrågor inför F20):

vi) För vilka integrerbara funktioner $f(x)$ gäller $\left|\int_{-3}^{4} f(x)dx\right| = \int_{-3}^{4} |f(x)|dx$?

Svar: Den här frågan är lite knepig. Om $f(x)$ är kontinuerlig så är svaret om antingen $f(x) \geq 0$ eller om $f(x) \leq 0$. Men om $f(x)$ är styckvis kontinuerlig så räcker det med att $f(x) \geq 0$ eller $f(x) \leq 0$ för alla utom ett ändligt antal punkter.

vii) Antag att $f(x)$ och $g(x) \geq 0$ är deriverbara på $[0, \infty]$, vad är $D \int_0^{g(x)} f(t)dt$? Kan vi försvaga något antagande och dra samma slutsats?

Svar: $g'(x)f(g(x))$. Observera att vi kan definiera $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, då är uttrycket i uppgiften $F(g(x))$ och vårt svar följer av analysens huvudsats och kedjeregeln. För det argumentet så behöver $f(x)$ inte vara deriverbar. Vi kan försvaga det antagandet till $f(x)$ kontinuerlig.

viii) Om $f(1) = -1$ och $\int_1^5 f'(x)dx = 2$ vad är $f(5)$?

Svar: $f(5) = 1$. Detta eftersom $2 = \int_1^5 f'(x)dx = f(5) - f(1) = f(5) + 1$.

ix) Gäller den generaliserade medelvärdessatsen utan antagandet $g \geq 0$? Om inte hitta på ett motexempel.

Svar: Nej den gäller inte. Tex om $g(x) = \sin(x)$ och $f(x) = x$, $a = -1$ och $b = 1$. Då är $f(\xi)\int_{-1}^{1} g(x) = 0$ för alla ξ men $\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx > 0$ då integranden är strikt positiv i alla punkter förutom $x = 0$.

x) Om $f(x)$ är kontinuerlig på $[a, b]$ så $D \int_a^x f(t)dt = f(x)$ enligt analysens huvudsats. Låt

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{om } x < 0 \\ 0 & \text{om } x = 0 \\ 1 & \text{om } x > 0 \end{cases}$$

och $F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)dt$. För vilka x är $F'(x)$ definierad, vad är värdet av $F'(x)$ i dessa punkter? Är höger respektive vänsterderivatan definierad, vad är värdet av höger och vänsterderivatan i så fall?

Svar: $F'(x)$ är definierad för $x \neq 0$ (dvs där $f(x)$ är kontinuerlig). Höger och vänsterderivatan är dock definierad överallt, detta följer direkt från höger och vänsterderivatans definition.

5: Bevisuppgift: Antag att $f(x)$ är definierad på $[-1, 1]$, $f(x) \geq 0$ och att $f(x)$ är integrerbar.

1. Visa att om $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0$ och om $f(x)$ är kontinuerlig så är $f(x) = 0$ på två sätt:

   (a) Genom Integralkalkylens Medelvärdessats.

(b) Genom att använda integralens definition och definitionen av kontinuitet.

LEDTRÅD: *Motsägelseargument.*

2. Visa att kontinuitetsantagandet är nödvändigt genom att visa att $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0$ för

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{för } x \neq 0 \\ 1 & \text{för } x = 0, \end{cases}$$

dvs. $f(x) \neq 0$ och $f(x) \geq 0$ men integralen är noll.

Bevis:

1. Enligt integralkalkylens medelvärdessats så finns det för varje $-1 \leq a < b \leq 1$ ett $\xi_{a,b} \in [a,b]$ så att $(b-a)f(\xi_{a,b}) = \int_a^b f(x)dx$. Eftersom $f(x) \geq 0$ så kommer

$$0 \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_{-1}^{1} f(x)dx + \int_a^b f(x)dx + \int_b^1 f(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)dx = 0.$$

Så $0 \leq \int_a^b f(x)dx \leq 0$ vilket implicerar att $0 = \int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi_{a,b})dx$. Vi kan dela den sista likheten med $b-a \neq 0$ (eftersom $b > a$) och härleda $f(\xi_{a,b}) = 0$ för alla a och b.

Vi följer ledtråden och försöker oss på ett motsägelseargument och antar att slutsatsen är falsk, dvs att det finns något $x_0 \in [-1,1]$ så att $f(x_0) \neq 0$. Då är $f(x_0) > 0$ (eftersom $f(x) \geq 0$ enligt antagande och $f(x_0) \neq 0$ enligt vår motsägelse hypotes).

Låt oss säga att $f(x_0) = 2\epsilon > 0$. Men eftersom $f(x)$ är kontinuerlig så finns det ett $\delta_\epsilon > 0$ så att $x_0 - \delta_\epsilon < x < x_0 + \delta_\epsilon$ implicerar att $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$, eller i andra ord att $f(x_0) + \epsilon > f(x) > f(x_0) - \epsilon = \epsilon$.

Föregående stycke implicerar att $x \in [x_0 - \delta_\epsilon/2, x_0 + \delta_\epsilon/2]$ innebär att $f(x) > \epsilon$. Dvs. $f(x) > \epsilon > 0$ för alla $x \in [x_0 - \delta_\epsilon/2, x_0 + \delta_\epsilon/2]$.

Nu väljer vi $[a,b] = [x_0 - \delta_\epsilon/2, x_0 + \delta_\epsilon/2]$. Då finns det ett $\xi_{a,b} \in [x_0 - \delta_\epsilon/2, x_0 + \delta_\epsilon/2]$ så att $f(\xi_{a,b}) = 0$ men detta motsäger att $f(x) > \epsilon > 0$ för alla $x \in [x_0 - \delta_\epsilon/2, x_0 + \delta_\epsilon/2]$. Vi har därför härlett en motsägelse till vårt antagande att $f(x) \neq 0$ för något $x \in [-1,1]$.

2. Det här argumentet är väldigt likartat. Vi gör ett motsägelseargument och antar att det finns ett $x_0 \in [-1,1]$ så att $f(x_0) \neq 0$. Precis som tidigare så finns det då ett $\epsilon > 0$ då att $f(x_0) = 2\epsilon$ (välj bara $\epsilon = f(x_0)/2$) och, eftersom f är kontinuerlig, ett $\delta_\epsilon > 0$ så att $f(x) > \epsilon$ för $x \in [x_0 - \delta_\epsilon/2, x_0 + \delta_\epsilon/2]$.

Under föreläsningen så bevisade vi att $\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sup_{\Psi \leq f} I(\Psi)$ där supremum tas över alla trappfunktioner. Observera att

$$\Gamma(x) = \begin{cases} 0 & \text{då } -1 < x < x_0 - \delta_\epsilon/2 \\ \epsilon & \text{då } x_0 - \delta_\epsilon/2 < x < x_0 + \delta_\epsilon/2 \\ 0 & \text{då } x_0 - \delta_\epsilon/2 < x < 1 \end{cases}$$

är en trappfunktion så att $f(x) > \Psi(x)$. Så

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sup_{\Psi \leq f} I(\Psi) \geq I(\Gamma) = \left\{ \begin{array}{c} \text{enligt} \\ \text{def. av} \\ I(\Gamma) \end{array} \right\} =$$

$$= (x_0 - \delta_\epsilon/2 + 1) \times 0 + \delta_\epsilon \epsilon + (1 - x_0 - \delta_\epsilon/2) \times 0 = \delta_\epsilon \epsilon > 0.$$

eftersom supremum över än mängd inte kan vara mindre än ett tal i mängden. Vi använde också att $I(\Psi) = \sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1})$ enligt definitionen för integraler av trappfunktioner (se sidan 295 i Persson-Böiers). Den sista olikheten säger att $\int_{-1}^{1} f(x)dx > 0$ vilket motsäger antagandet att integralen är noll. Detta bevisar att vårt antagande att $f(x_0) \neq 0$ för något x_0. Satsen är därmed bevisad.

Uppgift: *Om du tycker att det här beviset var svårt försök att rita en graf där du ritar in x_0 och Γ och se om du grafiskt kan förstå hur vi härleder att $\int_{-1}^{1} f(x)dx > 0$.*

(a) Vi gör detta genom att låta $\epsilon > 0$ vara en godtycklig konstant och definierar trappfunktionerna $\Psi(x) = 0$ och

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{då } -1 < x < -\epsilon/ \\ 1 & \text{då } -\epsilon < x < \epsilon/ \\ 0 & \text{då } \epsilon/2 < x < 1. \end{cases}$$

Då kommer $\Psi(x) \leq f(x) \leq \Theta(x)$ så $0 = I(\Psi) \leq \int_{-1}^{1} f(x)dx \leq I(\Theta) = 2\epsilon$. Men $\epsilon > 0$ var godtycklig så $\left|\int_{-1}^{1} f(x)dx\right|$ är mindre än varje tal som är större än noll. Vi drar slutsatsen att $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0$. Så det finns en icke-negativ funktion som inte är identiskt lika med noll men dess integral är noll.