Tränings Tentamen 1 SF1602 HT2013

Hjälpmedel: Papper, penna.

Totalt 6 poäng per uppgift. För godkänt på modulen krävs 4 poäng.

För E krävs 4 godkända moduler. För ett D krävs 5 godkända moduler. Med 5 godkända moduler ges rätten att skriva tentamen del 2 vilken ger möjlighet till C,B och A.

Tentamen DEL 1.

Fråga 1: [Del 1, Modul 1]

1. Var är $\lim_{x\to 0} \frac{x^3+\cos(x)}{4x^7+3}$? [Ingen motivering krävs.] **(1 poäng)**
2. Ange (den naturliga) värdemängden V_f och definitionsmängden D_f då $f(x) = \cos(\frac{\pi}{2}\sin(x))$. [Ingen motivering krävs.] **(1 poäng)**
3. Ange samtliga lösningar till $\sin(|x-2|) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. [Motivera ditt svar.] **(4 poäng)**

Fråga 2: [Del 1, Modul 2]

1. Ange en funktion $f(x)$ så att $f(1) = 1$ och $f(1) = 0$. [Svara med ett exempel eller "omöjligt".] **(1poäng)**
2. Låt $f(x)$ vara en injektiv funktion definierad på $[0,1]$. Ange värdemängden till f^{-1}. [Svara med en mängd eller "omöjligt att avgöra".] **(1poäng)**
3. Låt
$$f(x) = \begin{cases} \ln(x^2+1) & \text{om } x < 0 \\ \cos(\sin(x)+\tan(x)) & \text{om } x \geq 0 \end{cases}$$
vara en funktion definierad på $\mathbb{R}$. Beräkna $f'(x)$. [Fullständig motivering krävs.] **(4poäng)**

Fråga 3: [Del 1, Modul 3]

1. Låt $f(x)$ vara deriverbar på $\mathbb{R}$ och $F(x) = \int f(x)dx$. Ange ett villkår på $f(x)$ som garanterar att $F(x)$ är strikt konvex. [Ange villkåret.] **(1poäng)**
2. Ange en funktion $f(x)$ som är växande men $\int f(x)dx$ avtagande? [Svara med att ange funktionen.] **(1poäng)**
3. Bestäm alla primitiva funktioner till
$$\int \frac{5}{(x+3)^2}\sqrt{\frac{x+3}{x+2}}.$$
[Fullständig motivering krävs.] **(4poäng)**

Fråga 4: [Del 1, Modul 4]

1. Antag att $f(x) \geq 0$, $g(x) > 0$ och att $g'(x) < 0$ är $F(x) = \int_0^{g(x)} f(t)dt$ växande, avtangande, strikt växande eller strikt avtagande. [Ange vilket eller "Går inte att avgöra.".] **(1poäng)**
2. Hur definieras den generaliserade integralen $\int_0^\infty f(x)dx$? [Ange definitionen.] **(1poäng)**
3. Beräkna den generaliserade integralen $\int_3^\infty \frac{1}{(x+1)^2(x-1)}dx$. [Fullständig motivering krävs] **(4poäng)**

Fråga 5: [Del 1, Modul 5]

1. Låt $f(x)$ vara en lösning till följande differential ekvation $f'(x) = f(x)^3$, och $f(0) = a$. För vilka a är $f(x)$ garanterat strikt växande. [Ange alla värden a.] **(1poäng)**
2. Hur många lösningar har följande differentialekvation: $(y')^2 = \cos(x) - 3$. [Svara med ett tal eller "oändligt många".] **(1poäng)**

3. Lös följande differentialekvation:
$$y' + (1+y^2)x^2 = 0.$$
Med initialdata $y(0) = 1$. För vilka x är lösningen definierad?
STÄNDIG MOTIVERING KRÄVS.] **(4poäng)**

Fråga 6: [Del 1, Modul 6]

1. Antag att $f(x)$ har Maclaurinserien $1 + 2x - 3x^2 + R_3(x)$. Vad är andraderivatan av $g(x) = xf(x)$ i punkten $x = 0$.
[SVARA MED ETT TAL.] **(1poäng)**
2. Om $f(x)$ har Maclaurinserien $1 - \frac{1}{3}x^2 + 4x^3 + R_4(x)$, vad är Maclaurinserien av $f(x^2)$ med ordning 4.
[SVARA MED EN 4E ORDNINGENS MACLAURINSERIE.] **(1poäng)**
3. Visa att $|\tan(x) - x| \leq \frac{8}{3}|x|^3$ för alla x så att $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$. [MOTIVERA DITT SVAR.] **(4poäng)**

Tentamen DEL 2.

Varje fråga tilldelas 6 poäng. Totalt 36 poäng. För C krävs 12 poäng, för B krävs 20 poäng och för ett A krävs 28 poäng.

Fråga 1: [Del 2]

1. Ange värdet av
$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h}.$$
[INGEN MOTIVERING KRÄVS.] **(1 poäng)**
2. Bevisa ditt svar utifrån $\epsilon-$definitionen. **(5poäng)**

LEDTRÅD: *Du kan använda att* $\lim_{x\to 0} |\frac{\sin(x)}{x} = 1$ *och* $1 \geq \cos(x) \geq 1 - \frac{1}{2}x^2$ *utan bevis.*

Fråga 2: [Del 2] Följande påstående är felaktigt: "Om $f'(x) \leq 1$ för alla $x \in \mathbb{R}$ så kommer $f(x) \leq f(0) + |x|$." Identifiera felet och bevisa att påståendet är felaktigt. Lägg till ett nytt, och rimligt, antagande som gör påståendet riktigt och bevisa det riktiga påståendet.
[FULLSTÄNDIG MOTIVERING KRÄVS.] **(6poäng)**

Fråga 3: [Del 2] Hitta alla primitiva funktioner till $\frac{a}{b+c\sin(x)}$ och $b^2 > c^2$. Markera tydligt var du använder $b^2 > c^2$.
[FULLSTÄNDIG MOTIVERING KRÄVS.] **(6poäng)**

Fråga 4: [Del 2] Låt $f(x)$ vara monoton, kontinuerlig på $[-1,1]$ och $f(-1) = -2$, $f(1) = 1$.

1. Skissa ett tydligt bevis för att det finns en lösning till $f(x) = 0$ i $[-1,1]$. **(3poäng)**
2. Skissa ett tydligt bevis att mängden av lösningar till $f(x) = 0$ är antingen en punkt eller ett slutet intervall $I \subset [-1,1]$. **(3poäng)**

Fråga 5: [Del 2] En kanon skjuter en kula, som vid tidpunkten $t > 0$ har positionen $(x(t), y(t))$, med vinkeln $\pi/4$ radianer mätt av i relation till markplanet, som ges av $y = 0$, kulans hastighet vid tiden $t = 0$ är $\sqrt{2}$. Kulans hastighet i $y-$riktningen bestäms för $t > 0$ av Newtons ekvation $y''(t) = -1$, $y(0) = 0$ och kulans hastighet antas vara konstant i $x-$riktningen. Beräkna hur långt kulan färdas från att den avfyras i $t = 0$ tills den träffar markplanet $y = 0$.
[FULLSTÄNDIG MOTIVERING KRÄVS.] **(6poäng)**

Fråga 6: [Del 2] Låt $F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2(t)}}dt$. Beräkna $F(1/10)$ med två värdesiffror. Du kan använda att $|\sin(x)| \leq |x|$ utan bevis. [FULLSTÄNDIG MOTIVERING KRÄVS.] **(6poäng)**
VARNING: *Du kan inte hitta en primitiv funktion till den här integranden.*