Tentamen SF1602 13 Januari 2014

Hjälpmedel: Papper, penna.
Totalt 6 poäng per uppgift. För godkänt på modulen krävs 4 poäng.
För E krävs 4 godkända moduler. För ett D krävs 5 godkända moduler. Med 5 godkända moduler ges rätten att skriva tentamen del 2 vilken ger möjlighet till C,B och A. Modulresultat från tidigare kursomgångar gäller ej.

Tentamen DEL 1.

Fråga 1: [Del 1, Modul 1]

1. Hur många av följande gränsvärden är 0?
   a) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{(2x)^3}$, **b)** $\lim_{x\to\infty} e^{-2x}4^x$, **c)** $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-6x+9}{x-3}$,

   d) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x}$, **e)** $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)+|n|^n}{n!}$

   [Svara med ett tal 0,1,2,...,5. Ingen motivering krävs.] **(1 poäng)**

2. Den naturliga definitionsmängden samt värdemängden till $f \circ g(x)$ då $f(x) = \frac{1}{2+x}$ och $g(x) = 2\cos(x)$.

   [Ingen motivering krävs.] **(1 poäng)**

3. Beräkna följande gränsvärde
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 4x + 9^x}{6 + 3^{2x} - \ln(x)\cos(3x)}.$$
   Ange noga varje sats du använder i din uträkning.

   [Fullständig motivering krävs.] **(4 poäng)**

Fråga 2: [Del 1, Modul 2]

1. Antag att $f(x)$ är en kontinuerlig funktion definierad på $[0,1]$ så att $f(0) < 0$, $f(1) \geq 1$. Finns det då ett $x_0 \in [0,1]$ så att $f(x_0) = x_0$?

   [Svara "Ja", "Nej" eller "omöjligt att avgöra".] **(1poäng)**

2. Låt $f(x)$ vara en deriverbar funktion på $\mathbb{R}$. Ange definitionen av $f'(1/2)$?

   [Ange definitionen, ingen motivering krävs.] **(1poäng)**

3. Låt
$$f(x) = \begin{cases} 3 + \ln(x)\sin(x) & \text{om } x < \pi \\ a + b\cos\left(\frac{1}{2}x^2\right) & \text{om } x \geq \pi \end{cases}$$
   vara en funktion definierad på $]0,\infty[$. Bestäm a och b så att $f(x)$ är deriverbar i $x = \pi$. Hänvisa till de satser du använder.

   [Fullständig motivering krävs.] **(4poäng)**

Fråga 3: [Del 1, Modul 3]

1. Låt $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{om } -1 \leq x \leq 0 \\ 1 & \text{om } 0 < x < 1 \\ -1 & \text{om } 1 \leq x \leq 5 \end{cases}$. Ange en primitiv funktion $F(x)$ till $f(x)$ så att $F(x)$ är definierad på $[-1,5]$.

   [Ange $F(x)$ eller "omöjligt", ingen motivering krävs.] **(1poäng)**

2. Ange en rationell funktion som har partialbråksuppdelningen $\frac{3x}{x^2+1} + \frac{3}{(x-1)}$

   [Svara med att ange funktionen eller "omöjligt".] **(1poäng)**

3. Bestäm alla primitiva funktioner till $f(x) = e^{4x}\left(e^{2x}+3\right)^6$. Ange noga alla satser du använder.

[FULLSTÄNDIG MOTIVERING KRÄVS.] **(4poäng)**

Fråga 4: [Del 1, Modul 4]

1. Ange en kontinuerlig funktion på $[-1, 3]$ som inte är integrerbar.

[ANGE EN FUNKTION ELLER "OMÖJLIGT", INGEN MOTIVERING KRÄVS.] **(1poäng)**

2. Ge ett exempel på en funktion $f(x)$ definierad på $[0, \infty[$ så att $f(x) \leq \frac{1}{1+x^3}$ och $\int_0^\infty f(x)dx$ divergerar.

[ANGE EN FUNKTION $f(x)$ ELLER SVARA "OMÖJLIGT", INGEN MOTIVERING KRÄVS.] **(1poäng)**

3. Bestäm den punkt $\xi \geq 0$ då $\int_0^\xi e^{4\cos(2x)}\left(3-4x^2\right)dx$ antar sitt största värde. Hänvisa till de satser du använder.

[FULLSTÄNDIG MOTIVERING KRÄVS] **(4poäng)**

Fråga 5: [Del 1, Modul 5]

1. Hitta en noll-skild homogen lösning y_h till den andra ordningens differential ekvation med karakteristiskt polynom $r^2 - 9$.

[ANGE EN FUNKTION y_h ELLER "OMÖJLIGT". INGEN MOTIVERING KRÄVS] **(1poäng)**

2. Låt $y'(x) = ay(x)$ för alla $x \geq 0$ och $y(0) = 1$. Antag dessutom att $y(x)$ är begränsad i $[0, \infty[$. Vilka värden kan a ha?

[SVARA MED ALLA a ELLER "OMÖJLIGT ATT AVGÖRA". INGEN MOTIVERING KRÄVS] **(1poäng)**

3. Hitta lösningen $y(x)$ till följande differentialekvation

$$y''(x) + 4y(x) = xe^{2x} \qquad \text{för } x > 0$$

och $y(0) = 0$ och $y'(0) = 0$.

[FULLSTÄNDIG MOTIVERING KRÄVS.] **(4poäng)**

Fråga 6: [Del 1, Modul 6]

1. Antag att $f(x)$ har den konvergenta Maclaurinserien $\sum_{n=0}^\infty \frac{2^n}{3^n n!}x^n$. Vad är $f''(0)$?

[ANGE ANDRADERIVATAN, INGEN MOTIVERING KRÄVS.] **(1poäng)**

2. Antag att $|f^{(3)}(x)| \leq 2$ för alla $x \in \mathbb{R}$ och att andra ordningens Taylorpolynom till $f(x)$ i punkten $x = 1$ är $p_2(x) = 3 + (x-1)^2$ vad är det största värdet $|f(x) - p_2(x)|$ kan ha då $|x-1| \leq \frac{1}{10}$?

[SVARA MED ETT TAL, INGEN MOTIVERING KRÄVS.] **(1poäng)**

3. Beräkna andra ordningens Taylorpolynom i punkten $x_0 = 1$ till

$$f(x) = \int_0^x e^t \cos(2t)dt.$$

[MOTIVERA DITT SVAR.] **(4poäng)**

Tentamen DEL 2.

Varje fråga tilldelas 6 poäng. Totalt 36 poäng. För C krävs 12 poäng, för B krävs 20 poäng och för ett A krävs 28 poäng.

Fråga 1: [Del 2] Skissa grafen till funktionen $f(x) = \arctan x + \frac{x}{x^2-1}$. Ange noga alla singulära punkter, extrempunkter och beteendet av funktionen i oändligheten.

[MOTIVERA DITT SVAR.] **(6 poäng)**

Fråga 2: [Del 2] Beräkna följande integral

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\cos^2(2x)}{\sin(2x)} dx.$$

[FULLSTÄNDIG MOTIVERING KRÄVS.] **(6poäng)**

Fråga 3: [Del 2] Låt $f(x)$ vara uniformt kontinuerlig på $[0,1]$. Bevisa att $f(x)$ är Riemann integrerbar. Var noga med att ange alla definitioner du använder dig av.

[FULLSTÄNDIGT BEVIS KRÄVS DU FÅR REFERERA TILL KÄNDA SATSER OM KONTINUERLIGA FUNKTIONER MEN INTE TILL SATSER OM INTEGRERBARHET.] **(6poäng)**

Fråga 4: [Del 2] Hitta följande gränsvärde $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3}{4x^2-4x+8}$. Bevisa ditt svar direkt utifrån $\epsilon - \delta$ definitionen för gränsvärden.

[FULLSTÄNDIG MOTIVERING KRÄVS.] **(6poäng)**

Fråga 5: [Del 2]

1. Visa, med ett motexempel, att följande påstående är felaktigt: *"Om $f(x)$ är deriverbar på $[0,1]$ och $f(x)$ antar ett lokalt maximum i punkten $x_0 \in [0,1]$ så kommer $f'(x_0) = 0$".*

   [FULLSTÄNDIG MOTIVERING KRÄVS.] **(2poäng)**

2. Lägg till ett nytt, och rimligt, antagande som ger ett riktigt påstående och bevisa det nya påståendet. Markera noga vart du använder det nya antagandet.

   [FULLSTÄNDIG MOTIVERING KRÄVS.] **(4poäng)**

Fråga 6: [Del 2] Det är Juni år 1815 och utanför Waterloo förbereder sig Napoleons, Wellingtons och Blüchers arméer för drabbning. Napoleon har satt upp följande matematiska modell för det kommande slaget:

$$\begin{aligned} E'(t) &= -\tfrac{s}{10}F(t) \\ P'(t) &= -\tfrac{(1-s)}{10}F(t) \\ F'(t) &= -\tfrac{s}{10}E(t) - \tfrac{3(1-s)}{20}P(t) \end{aligned}$$

där $F(t)$, $E(t)$ och $P(t)$ är antalet soldater i den Franska, Engelska och Preussiska armen t timmar efter slagets början. Parametern $s \in [0,1]$ anger hur stor andel av den Franska hären Napoleon avsätter för att angripa Wellingtons engelska styrkor. Vid slagets början gäller $F(0) = 100000$, $E(0) = 60000$ och $P(0) = 40000$.

Härled en formel som anger hur många franska soldater, som en funktion av s, som lever en timme efter slaget har börjat. Dvs. beräkna $F(1)$ som en funktion av s.

[FULLSTÄNDIG MOTIVERING KRÄVS.] **(6poäng)**