Tentamen SF1602 12 Jan 2015

Hjälpmedel: Papper, penna.

Totalt 6 poäng per uppgift. För godkänt på modulen krävs 4 poäng.

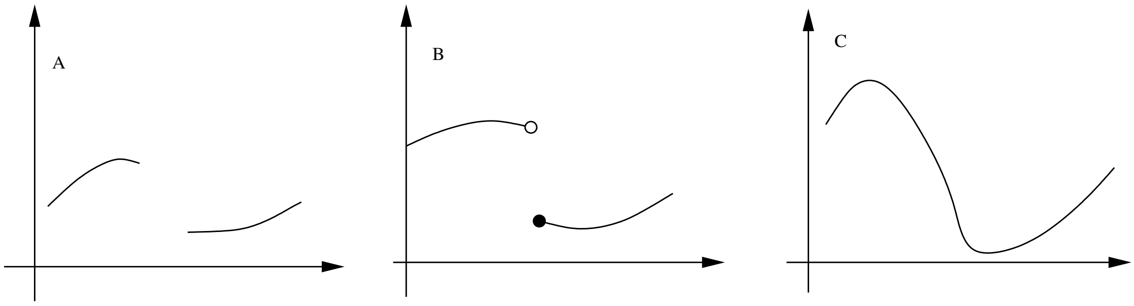
För E krävs 4 godkända moduler. För ett D krävs 5 godkända moduler. Med 5 godkända moduler ges rätten att skriva tentamen del 2 vilken ger möjlighet till C,B och A. Modulresultat från tidigare kursomgångar gäller ej - endast modulresultat från HT2014 gäller.

Om plussning: Om du redan är godkänd på kursen med ett D eller bättre så behöver du inte skriva del 1. Om du inte är godkänd på kursen eller har ett E på kursen så måste du skriva del 1. Du behåller dock de moduler som du klarade genom KSar eller inlämningsuppgifter under kursomgången HT2014. Moduler som klarats vid tidigare kursomgångar eller tentamen räknas inte.

Tentamen DEL 1.

Fråga 1: [Del 1, Modul 1]

1. Vilka av följande funktioner är kontinuerliga på sina definitionsmängder



[SVARA MED A, B, OCH/ELLER C OM MOTSVARANDE GRAF ÄR GRAFEN AV EN KONTINUERLIG FUNKTION. INGEN MOTIVERING KRÄVS.] **(1 poäng)**

2. Ange en funktion $f(x)$ definierad för alla $x > 0$ så att $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ och så att $\frac{1}{f(x)}$ varken går till $+\infty$ eller $-\infty$ då $x \to \infty$.

[ANGE EN FUNKTION ELLER SVARA MED "OMÖJLIGT". INGEN MOTIVERING KRÄVS.] **(1 poäng)**

3. Hitta alla lösningar till följande ekvation: $2e^{2x} - \ln\left(\tan^2(\sqrt{x}) + 1\right) = 2\ln\left(|\cos(\sqrt{x})|\right) + e^x$.

[FULLSTÄNDIG MOTIVERING KRÄVS.] **(4 poäng)**

Fråga 2: [Del 1, Modul 2]

1. Låt $f(x)$ vara en kontinuerligt deriverbar funktion på $[0, 2]$. Ange tangentlinjens ekvation till $f(x)$ i punkten $x = 1$.

[INGEN MOTIVERING KRÄVS.] **(1poäng)**

2. Skissa grafen av en funktion $f(x)$ på $[-1, 1]$ som inte är deriverbar i punkterna $x = 0$ och $x = 1/2$.

[SKISSA GRAFEN ELLER ANGE "OMÖJLIGT". INGEN MOTIVERING KRÄVS.] **(1poäng)**

3. En partikel i ett kraftfält har positionen $P(t)$ i tidpunkten t där $P(t)$ uppfyller ekvationen $P^2(t) = \ln(t + \sqrt{2 + t^2})$. Beräkna tidpunkten t_0 då $P(t_0) = 2$ samt partikelns hastighet i tidpunkten t_0.

[FULLSTÄNDIG MOTIVERING KRÄVS. DU FÅR ANTAGA ATT $P(t)$ ÄR DERIVERBAR.] **(4poäng)**

Fråga 3: [Del 1, Modul 3]

1. Ge ett exempel på en funktion $f(x)$ definierad på $[-1, 1]$ så att $f(x)$ har minst en primitiv funktion definierad på $[-1, 1]$ som inte är deriverbar i $x = 0$.

[ANGE $f(x)$ ELLER "OMÖJLIGT", INGEN MOTIVERING KRÄVS.] **(1poäng)**

2. Antag att $F(x)$ är primitiv till $f(x)$ på $\mathbb{R}$. Vilken funktion är $e^x F(\sin(x))$ primitiv till?

[DITT SVAR FÅR INNEHÅLLA FUNKTIONERNA f OCH F. INGEN MOTIVERING KRÄVS.] **(1poäng)**

3. Hitta alla primitiva funktioner till $e^{6x}\left(e^{3x}+7\right)^{148}$.

[FULLSTÄNDIG MOTIVERING KRÄVS.] **(4poäng)**

Fråga 4: [Del 1, Modul 4]

1. Ge ett exempel på en funktion $f(x)$ definierad på $[0,\infty[$ så att den generaliserade integralen $\int_0^\infty f(x)dx$ är divergent och den generaliserade integralen $\int_0^\infty f^2(x)dx$ är konvergent.

[ANGE $f(x)$ ELLER "OMÖJLIGT", INGEN MOTIVERING KRÄVS.] **(1poäng)**

2. Ange derivatan av $F(x) = \int_0^{e^x} \sin^7(t)dt$.

[ANGE DERIVATAN VÄRDE ELLER "OMÖJLIGT", INGEN MOTIVERING KRÄVS.] **(1poäng)**

3. Beräkna följande integral $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2x)}{\cos^2(2x)-\cos(2x)-6}dx$.

[FULLSTÄNDIG MOTIVERING KRÄVS] **(4poäng)**

Fråga 5: [Del 1, Modul 5]

1. Ange en andra ordningens differentialekvation $y''(x)+ay'(x)+by(x) = 0$ så att alla lösningar $y(x)$, oavsett initialdata, uppfyller $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$.

[ANGE DIFF EKVATIONEN ELLER "OMÖJLIGT". INGEN MOTIVERING KRÄVS] **(1poäng)**

2. Skissa, i ett koordinatsystem, vektorfältet till följande differentialekvation: $y'(x) = \sqrt{|x|}$ samt lösningen som uppfyller $y(0) = 1$.

[GÖR EN TYDLIG MEN ENKEL SKISS AV VERKTORFÄLTET OCH LÖSNINGSKURVAN. INGEN MOTIVERING KRÄVS] **(1poäng)**

3. Lös följande differentialekvation:

$$\begin{array}{ll} y''(x) - 2y'(x) + y(x) = e^{2x}\sin(x) & \text{för } x \in \mathbb{R} \\ y(0) = -\frac{1}{2}, \quad y'(0) = 1 & \end{array}$$

[FULLSTÄNDIG MOTIVERING KRÄVS.] **(4poäng)**

Fråga 6: [Del 1, Modul 6]

1. Låt $f(x) = 3 + 7(x-3) - 2(x-3)^4 + 3(x-3)^5$. Vad är fjärde ordningens Taylorpolynom till $f(x)$ i punkten $x = 3$?

[ANGE TAYLORPOLYNOMET ELLER "OMÖJLIGT ATT AVGÖRA", INGEN MOTIVERING KRÄVS.] **(1poäng)**

2. Låt $y(x)$ vara lösningen till följande differentialekvation $2y''(x) - 3y'(x) = 3x^2 + 1$, $y(0) = 1$ och $y'(0) = 2$. Vad är första ordningens Maclaurinpolynom till $y(x)$?

[ANGE MACLAURINPOLYNOMET ELLER "OMÖJLIGT ATT AVGÖRA", INGEN MOTIVERING KRÄVS.] **(1poäng)**

3. Beräkna värdet av $f(9/10)$ med maximalt fel 10^{-3} då

$$f(x) = \ln(1+3x^2).$$

[MOTIVERA DITT SVAR.] **(4poäng)**

Tentamen DEL 2.

Varje fråga tilldelas 6 poäng. Totalt 36 poäng. För C krävs 12 poäng, för B krävs 20 poäng och för ett A krävs 28 poäng.

Fråga X: Ange om du har D eller bättre från en tidigare kursomgång och om du är här för att plussa.

Fråga 7: [Del 2] Låt $F(x) = \int_0^{e^x} \cos(t^2)dt$.

1. Hitta alla lokala maxima till $F(x)$.

[MOTIVERA DITT SVAR.] **(3 poäng)**

2. Hitta det $x \geq 0$ där $F(x)$ antar sitt maxvärde.

LEDTRÅD: *Om $x_1, x_2, ...$ är lokala maxima till $F(x)$ kan du visa att $F(x_{k+1}) \geq F(x_k)$ eller $F(x_{k+1}) \leq F(x_k)$?*

[MOTIVERA DITT SVAR.] **(3 poäng)**

Fråga 8: [Del 2] Approximera $e^{x^2}\cos(x^3)$ på $[-1/2, 1/2]$ med ett polynom så att felet blir maximalt 10^{-3}.

[FULLSTÄNDIG MOTIVERING KRÄVS.] **(6poäng)**

Fråga 9: Låt $f(x) = x^3 - 4x^2 - 6x + 24 - (x - 5/2)\ln(x)$.

1. Givet att $x_0 = 5/2$ är en approximativ lösning till ekvationen $f(x) = 0$. Använd Newton-Raphsons metod (en iteration är tillräckligt) för att hitta en bättre approximation x_1 till lösningen.

[FULLSTÄNDIG MOTIVERING KRÄVS.] **(3poäng)**

2. En beräkning med miniräknare ger att $f(x_1) \approx 0.0071$. Bevisa att x_1, från deluppgift 1, ligger inom 10^{-2} från ett riktigt nollställe till $f(x) = 0$.

[FULLSTÄNDIG MOTIVERING KRÄVS.] **(3poäng)**

Fråga 10: [Del 2]

1. Beräkna följande gränsvärde:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x \cos(\ln(1+t))dt}{e^x - 1}.$$

[EN FULLSTÄNDIG MOTIVERING KRÄVS, DU FÅR INTE ANVÄNDA DELUPPGIFT 2 UTAN ATT BEVISA DEN.] **(3poäng)**

2. Visa att i allmänhet om $f(x)$ är kontinuerligt deriverbar och $g(x)$ två gånger kontinuerligt deriverbar i en omgivning av $x = 0$, och om $g(0) = 0$, $g'(0) \neq 0$ då kommer

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x f(t)dt}{g(x)} = \frac{f(0)}{g'(0)}.$$

[ETT KOMPLETT BEVIS KRÄVS DÄR DU NOGA REFERERAR TILL KÄNDA SATSER SOM DU ANVÄNDER.] **(3poäng)**

Fråga 11: [Del 2] Antag att $f(x)$ och $g(x)$ är integrerbara på $[0, 1]$ och att $a, b \in \mathbb{R}$ är givna tal. Bevisa, direkt utifrån definitionen, att $af(x) + bg(x)$ är integrerbar.

[FULLSTÄNDIG MOTIVERING KRÄVS.] **(6poäng)**

Fråga 12: [Del 2] Låt $f(x) \geq 0$ vara en funktion på $[0, 1]$. Låt $t \geq 0$ och Y_t vara rotationsytan som fås om grafen av $tf(x)$ roteras ett varv kring $x-$axeln och låt V_t vara motsvarande rotationsvolym.

1. Hitta alla tal $t_0 \geq 0$ så att $Y_{t_0} = V_{t_0}$ då $f(x) = \sqrt{x}$.

[FULLSTÄNDIG MOTIVERING KRÄVS.] **(3poäng)**

2. Antag att $f(x_0) > 0$ i någon punkt x_0, och att $f(x)$ är kontinuerligt deriverbar på $[0, 1]$. Låt $T = \frac{2}{\sup_{x \in [0,1]} f(x)}$ och bevisa att för alla $t \in]0, T]$ så gäller det att $Y_t \geq V_t$.

[ETT FULLSTÄNDIGT BEVIS KRÄVS.] **(3poäng)**

Lycka Till!