Tentamen SF1602 12 Jan 2015

Hjälpmedel: Papper, penna.

Totalt 6 poäng per uppgift. För godkänt på modulen krävs 4 poäng.

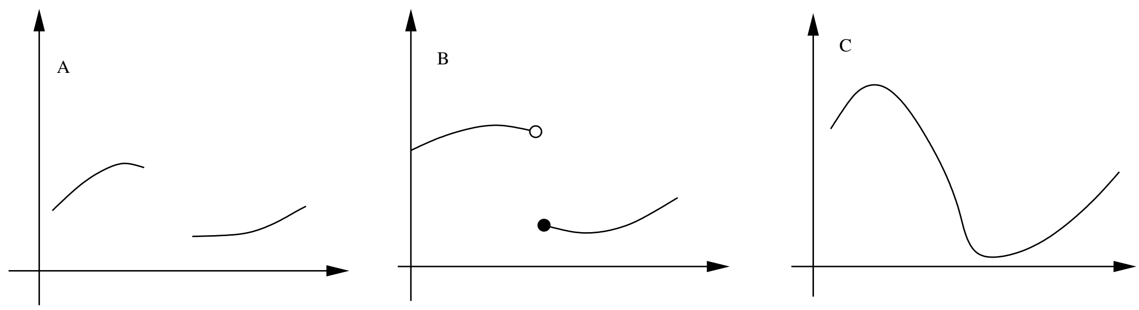
För E krävs 4 godkända moduler. För ett D krävs 5 godkända moduler. Med 5 godkända moduler ges rätten att skriva tentamen del 2 vilken ger möjlighet till C,B och A. Modulresultat från tidigare kursomgångar gäller ej - endast modulresultat från HT2014 gäller.

Om plussning: Om du redan är godkänd på kursen med ett D eller bättre så behöver du inte skriva del 1. Om du inte är godkänd på kursen eller har ett E på kursen så måste du skriva del 1. Du behåller dock de moduler som du klarade genom KSar eller inlämningsuppgifter under kursomgången HT2014. Moduler som klarats vid tidigare kursomgångar eller tentamen räknas inte.

Tentamen DEL 1.

Fråga 1: [Del 1, Modul 1]

1. Vilka av följande funktioner är kontinuerliga på sina definitionsmängder



[Svara med A, B, och/eller C om motsvarande graf är grafen av en kontinuerlig funktion. Ingen motivering krävs.] **(1 poäng)**

2. Ange en funktion $f(x)$ definierad för alla $x > 0$ så att $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ och så att $\frac{1}{f(x)}$ varken går till $+\infty$ eller $-\infty$ då $x \to \infty$.

[Ange en funktion eller svara med "omöjligt". Ingen motivering krävs.] **(1 poäng)**

3. Hitta alla lösningar till följande ekvation: $2e^{2x} - \ln\left(\tan^2(\sqrt{x}) + 1\right) = 2\ln\left(|\cos(\sqrt{x})|\right) + e^x$.

[Fullständig motivering krävs.] **(4 poäng)**

Svar fråga 1:

1. A och C är kontinuerliga. Observera att A är kontinuerlig trots att grafen inte är sammanhängande då funktionen är definierad på ett icke sammanhängande intervall.

2. $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

3. Vi börjar med att observera att $\tan^2(\sqrt{x}) + 1 = \frac{\sin^2(\sqrt{x})+\cos^2(\sqrt{x})}{\cos^2(\sqrt{x})} = \frac{1}{|\cos(\sqrt{x})|^2}$ där vi använde den trigonometriska ettan och att $a^2 = |a|^2$ i den sista likheten. Det följer därför att

$$-\ln\left(\tan^2(\sqrt{x}) + 1\right) = -\ln\left(\frac{1}{|\cos(\sqrt{x})|^2}\right) = 2\ln\left(|\cos(\sqrt{x})|\right),$$

där den sista likheten följer av logaritmlagen $a\ln(b) = \ln(b^a)$. Eftersom $2\ln\left(|\cos(\sqrt{x})|\right)$ ingår i både höger och vänsterled in den givna ekvationen så kan vi förkorta bort de termerna och reducera ekvationen till

$$2e^{2x} = e^x \Rightarrow 2(e^x)^2 - e^x = 0,$$

eftersom $e^{ab} = (e^a)^b$ enligt lagarna för exponentialfunktionen. Om vi sätter $y = e^x$ så reduceras ekvationen till

$$2y^2 + y = 0 \Rightarrow y = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ eller} \\ 0. \end{cases}$$

Eftersom $e^x > 0$ för alla x så kan vi dra slutsatsen att $y > 0$ vilket implicerar att $y = 1/2$. Eftersom $e^x = y = 1/2$ så följer det att $x = -\ln(2)$ vilket är vårt svar.

Rättningsmall: De första delfrågorna rättas bara rätt (1poäng) eller fel (0poäng).

Den tredje delfrågan testar främst kunskap om beräkning med de elementära funktionerna. Helt rätt svar ger 4poäng. För övrigt så gäller

1. -2 poäng om inga motiveringar görs, -1poäng om motiveringarna är bristfälliga.
2. -1 poäng för att använda en logaritmlag, lag för trigonometriska funktioner, eller lag för exponentialfunktionen fel.
3. Max 2 poäng om man inte kan lösa $2e^{2x} = e^x$.

Fråga 2: [Del 1, Modul 2]

1. Låt $f(x)$ vara en kontinuerligt deriverbar funktion på $[0, 2]$. Ange tangentlinjens ekvation till $f(x)$ i punkten $x = 1$.

   [Ingen motivering krävs.] **(1poäng)**

2. Skissa grafen av en funktion $f(x)$ på $[-1, 1]$ som inte är deriverbar i punkterna $x = 0$ och $x = 1/2$.

   [Skissa grafen eller ange "omöjligt". Ingen motivering krävs.] **(1poäng)**

3. En partikel i ett kraftfält har positionen $P(t)$ i tidpunkten t där $P(t)$ uppfyller ekvationen $P^2(t) = \ln(t + \sqrt{2 + t^2})$. Beräkna tidpunkten t_0 då $P(t_0) = 2$ samt partikelns hastighet i tidpunkten t_0.

   [Fullständig motivering krävs. Du får antaga att $P(t)$ är deriverbar.] **(4poäng)**

Svar fråga 2:

1. Tangentens ekvation är $f'(1)(x - 1) + f(1)$.

2.

3. Vi är intresserade av tidpunkten då $P(t_0) = 2$ dvs då $4 = P(t_0)^2 = \ln(t_0 + \sqrt{2 + t_0^2})$ vilket är samma sak som $e^4 = t_0 + \sqrt{2 + t_0^2}$. Vi subtraherar t_0 från båda leden och kvadrerar och får då

$$t_0^2 + 2e^4 t_0 + e^8 = 2 + t_0^2 \to t_0 = e^{-4} - \frac{e^4}{2}.$$

Vi deriverar båda leden (implicit derivering) i $P^2(t) = \ln(t + \sqrt{2 + t^2})$ och får

$$\frac{dP(t)}{dt} = \left\{ \begin{array}{c} \text{produkt} \\ \text{regeln} \end{array} \right\} = 2P(t)P'(t) = \frac{1}{t + \sqrt{2 + t^2}} \left(1 + \frac{t}{\sqrt{2 + t^2}}\right) = \frac{1}{t + \sqrt{2 + t^2}} \left(\frac{t + \sqrt{2 + t^2}}{\sqrt{2 + t^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2 + t^2}},$$

där vi använde logaritmens derivata och kedjeregeln för att beräkna högerledets derivata. Om vi stoppar in $t = t_0$ och använder $P(t_0) = 2$ i ovanstående uttryck så får vi

$$4P'(t_0) = \frac{1}{\sqrt{2 + t_0^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{-8} + \frac{e^8}{4}}}.$$

Detta ger hastigheten att i t_0 är

$$P'(t_0) = \frac{1}{\sqrt{16 + 16e^{-8} + 4e^8}}.$$

Svar: Tidpunkten $t_0 = e^{-4} - \frac{e^4}{2}$ och hastigheten är $P'(t_0) = \frac{1}{\sqrt{16+16e^{-8}+4e^8}}$.

Rättningsmall: Uppgiften testar främst förmågan att derivera och manipulera uttryck.

1. 1 poäng för vardera av de första två delfrågorna. De rättas bara rätt/fel.
2. Att kunna derivera $\ln(t+\sqrt{2+t^2})$ (eller kvadratroten ur densamma) skall ge 2 poäng.
3. Formelmanipulation skall ge 2 poäng. 1poäng för att beräkna t_0 och ett poäng för att kunna sätta in t_0 på ett riktigt sätt i uttrycket för $P'(t_0)$.
4. Minus upp till två poäng för att inte beskriva vad man gör. Det är lite knepigt att avgöra hur mycket som skall skrivas men någon medvetenhet om teorin skall visas.

Fråga 3: [Del 1, Modul 3]

1. Ge ett exempel på en funktion $f(x)$ definierad på $[-1,1]$ så att $f(x)$ har minst en primitiv funktion definierad på $[-1,1]$ som inte är deriverbar i $x=0$.

   [Ange $f(x)$ eller "omöjligt", ingen motivering krävs.] **(1poäng)**

2. Antag att $F(x)$ är primitiv till $f(x)$ på $\mathbb{R}$. Vilken funktion är $e^x F(\sin(x))$ primitiv till?

   [Ditt svar får innehålla funktionerna f och F. Ingen motivering krävs.] **(1poäng)**

3. Hitta alla primitiva funktioner till $e^{6x}\left(e^{3x}+7\right)^{148}$.

   [Fullständig motivering krävs.] **(4poäng)**

Svar fråga 3:

1. Omöjligt. En primitiv funktion är deriverbar per definition.
2. $e^x F(\sin(x)) + e^x \cos(x) f(\sin(x))$
3. Vi substituerar $y=e^{3x}$ och beräknar

$$\int e^{6x}\left(e^{3x}+7\right)^{148}dx = \left\{\begin{array}{l} dy = 3e^{3x}dx \\ dx = \frac{1}{3y}dy \end{array}\right\} = \int y^2 (y+7)^{148}\frac{dy}{3y} = \frac{1}{3}\int y\,(y+7)^{148}\,dy.$$

Vi skriver om $(y+7)^{148} = \frac{1}{149}\frac{d(y+7)^{149}}{dy}$ och gör en partiell integration i integralen:

$$\frac{1}{3}\int y\,(y+7)^{148}\,dy = \frac{1}{3\cdot 149}\int y\frac{d\,(y+7)^{149}}{dy}dy =$$
$$= \frac{1}{3\cdot 149}y\,(y+7)^{149} - \frac{1}{3\cdot 149}\int (y+7)^{149}\,dy =$$
$$= \frac{1}{3\cdot 149}y\,(y+7)^{149} - \frac{1}{3\cdot 149\cdot 150}(y+7)^{150} + C,$$

där C är en godtycklig konstant. Återsubstituerar vi $y=e^{3x}$ så får vi

$$\int e^{6x}\left(e^{3x}+7\right)^{148}dx = \frac{1}{3\cdot 149}e^{3x}\left(e^{3x}+7\right)^{149} - \frac{1}{3\cdot 149\cdot 150}\left(e^{3x}+7\right)^{150} + C$$

vilket är vårt svar.

Rättningsmall: Den här uppgiften testar främst förmågan att hitta primitiva funktioner.
De första delfrågorna ger 1 poäng styck. Rättas bara med rätt/fel. För delfråga 3 gäller:

1. Upp till -2 poäng för dåliga motivationer. Speciellt så vill jag se en medvetenhet om det teoretiska underbygget av beräkningarna. Vissa buzzworlds bör nämnas såsom partiell integration och substitution. Använd ert omdöme när ni rättar.
2. Att kunna substituera skall ge 2 poäng och att kunna partiell integration skall ge 2 poäng.
3. Om någon försöker att utveckla $(y+7)^{149}$ binomialsatsen så rätta hårt och dra poäng om lösningen blir oläslig då metoden är dålig. Men om metoden är rätt genomförd och ger ett läsligt svar så skall den metoden ge full poäng.

Fråga 4: [Del 1, Modul 4]

1. Ge ett exempel på en funktion $f(x)$ definierad på $[0, \infty[$ så att den generaliserade integralen $\int_0^\infty f(x)dx$ är divergent och den generaliserade integralen $\int_0^\infty f^2(x)dx$ är konvergent.

   [ANGE $f(x)$ ELLER "OMÖJLIGT", INGEN MOTIVERING KRÄVS.] **(1poäng)**

2. Ange derivatan av $F(x) = \int_0^{e^x} \sin^7(t)dt$.

   [ANGE DERIVATAN VÄRDE ELLER "OMÖJLIGT", INGEN MOTIVERING KRÄVS.] **(1poäng)**

3. Beräkna följande integral $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2x)}{\cos^2(2x)-\cos(2x)-6}dx$.

   [FULLSTÄNDIG MOTIVERING KRÄVS] **(4poäng)**

Svar fråga 4:

1. $\frac{1}{1+x}$
2. $e^x \sin^7(e^x)$
3. Vi börjar med att observera att integranden är kontinuerlig och att integralen därför existerar eftersom kontinuerliga funktioner är integrerbara på slutna begränsade intervall. Speciellt så är integranden en sammansättning av kontinuerliga funktioner och nämnaren uppfyller $\cos^2(2x) - \cos(2x) - 6 \leq -4$ så nämnaren är aldrig noll. Därför så är integranden kontinuerlig.

   Vi gör substitutionen $y = \cos(2x)$ vilken är väldefinierad då $\cos(2x)$ är avtagande och deriverbar på integrationsintervallet. Vi får (något informellt) att $dy = -2\sin(2x)dx$ och att $y = 1$ då $x = 0$ och $y = -1$ då $x = \pi/2$. Således så får vi

   $$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2x)}{\cos^2(2x) - \cos(2x) - 6}dx = -\frac{1}{2}\int_1^{-1} \frac{1}{y^2 - y - 6}dy = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{y^2 - y - 6}dy, \qquad (1)$$

   där vi ändrade integrationsordningen i det sista steget, och därför multiplicerade bort -1 framför integralen.

   Integralen i y är över en rationell funktion som vi lämpligen partialbråksuppdelar. Rötterna till nämnaren ges enligt p, q-formeln $y = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$ d.v.s. $y = -2$ eller $y = 3$. Vi ansätter därför att

   $$\frac{1}{y^2 - y - 6} = \frac{a}{y+2} + \frac{b}{y-3} \Rightarrow 1 = (a+b)y - 3a + 2b$$

   vilket ger, genom att jämföra koefficienter i VL och HL, ekvationssystemet

   $$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix},$$

   där jag (av pur lättja) har underlåtit att beskriva hur det elementära ekvationssystemet löses (fråga Per Kulberg om ni inte vet...).

   Sätter vi in $\frac{1}{y^2-y-6} = \frac{-1}{5}\frac{1}{y+2} + \frac{1}{5}\frac{1}{y-3}$ i (1) så får vi

   $$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{y^2 - y - 6}dy = \frac{1}{10}\int_{-1}^{1} \left(\frac{-1}{y+2} + \frac{1}{y-3}\right) dy =$$

   $$= \frac{1}{10}\left[-\ln(|y+2|) + \ln(|y-3|)\right]_{y=-1}^{y=1} = \frac{1}{10}\left(-\ln(3) + \ln(1) + \ln(2) - \ln(4)\right) = -\frac{\ln(6)}{10},$$

   där vi använde logaritmlagar för att förenkla vårt svar i den sista likheten.

   Svar: $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2x)}{\cos^2(2x)-\cos(2x)-6}dx = -\frac{\ln(6)}{10}$.

Rättningsmall: Den här frågan ämnar främst att se att studenten kan integrera. Som alltid så rättas delfråga 1 och 2 enbart med rätt/fel och ger en poäng styck. För delfråga 3 gäller

1. Upp till två minuspoäng för att inte förklara sin lösning.
2. Att kunna substituera korrekt skall ge två poäng.
3. Att kunna partialbråksuppdela skall ge två poäng.

4. Ett enstaka enkelt beräkningsfel skall inte ge poängavdrag om det inte vittnar om att studenten inte har förstått ett viktigt moment i kursen (tex att använda en logaritmlag på ett uppenbart felaktigt sätt). Flera enkla beräkningsfel skall dock bestraffas.

Fråga 5: [Del 1, Modul 5]

1. Ange en andra ordningens differentialekvation $y''(x)+ay'(x)+by(x)=0$ så att alla lösningar $y(x)$, oavsett initialdata, uppfyller $\lim_{x\to\infty} y(x)=0$.

   [Ange diff ekvationen eller "omöjligt". Ingen motivering krävs] **(1poäng)**

2. Skissa, i ett koordinatsystem, vektorfältet till följande differentialekvation: $y'(x)=\sqrt{|x|}$ samt lösningen som uppfyller $y(0)=1$.

   [Gör en tydlig men enkel skiss av verktorfältet och lösningskurvan. Ingen motivering krävs] **(1poäng)**

3. Lös följande differentialekvation:

$$\begin{aligned} &y''(x)-2y'(x)+y(x)=e^{2x}\sin(x) \qquad \text{för } x\in\mathbb{R} \\ &y(0)=-\tfrac{1}{2}, \quad y'(0)=1 \end{aligned}$$

   [Fullständig motivering krävs.] **(4poäng)**

Svar fråga 5:

1. Tex $y''+3y'+2=0$ d.v.s. $a=3$ och $b=2$, det viktiga är att det karakteristiska polynomet har två negativa rötter.

2.

3. Vi börjar med att hitta den homogena lösningen. För det så löser vi det karakteristiska polynomet $r^2-2r+1=0$, d.v.s. $r=1$ vilket är en dubelrot enligt $p,q-$formeln. Vi får därför den allmänna homogena lösningen

$$y_h(x)=axe^x+be^x$$

för godtyckliga tal $a,b\in\mathbb{R}$. Innan vi bestämmer a och b så behöver vi hitta en partikulärlösning.

För att hitta partikulärlösningen $y_p(x)$ så gör vi standardansättningen

$$y_p(x)=ce^{2x}\sin(x)+de^{2x}\cos(x),$$

för $c,d\in\mathbb{R}$. Om vi sätter in y_p i differential ekvationen så får vi

$$\begin{aligned} y_p''(x)-2y_p'(x)+y_p(x) &= \left(4ce^{2x}\sin(x)+4ce^{2x}\cos(x)-ce^{2x}\sin(x)+4de^{2x}\cos(x)-4de^{2x}\sin(x)-de^{2x}\cos(x)\right)+ \\ &+2\left(2ce^{2x}\sin(x)+ce^{2x}\cos(x)+2de^{2x}\cos(x)-de^{2x}\sin(x)\right)+\left(ce^{2x}\sin(x)+de^{2x}\cos(x)\right)= \\ &=-2de^{2x}\sin(x)+2ce^{2x}\cos(x). \end{aligned}$$

Jämför vi detta med högerledet i differentialekvationen så ser vi att $-2d=1$ och $2c=0$. Dvs $d=-\frac{1}{2}$ och $c=0$. Vi får därför att

$$y(x)=axe^x+be^x-\frac{1}{2}e^{2x}\cos(x)$$

är en lösning till differentialekvationen för alla $a, b \in \mathbb{R}$. Eftersom $y(0) = -\frac{1}{2}$ så måste

$$-\frac{1}{2} = a \cdot 0 \cdot e^0 + be^0 - \frac{1}{2}e^0 \cos(0) \Rightarrow b = 0.$$

På samma sätt ger $y'(0) = 1$ att

$$1 = ae^0 + a \cdot 0 \cdot e^0 - e^{2\cdot 0} \cos(0) + \frac{1}{2}e^{2\cdot 0} \sin(0) = a - 1 \Rightarrow a = 2.$$

Vi får därför att:

Svar: $y(x) = 2xe^x - \frac{1}{2}e^{2x} \cos(x)$ löser initialvärdesproblemet.

Rättningsmall: delfråga 1 och 2 rättas bara rätt/fel. För delfråga 3 gäller

1. Upp till två poängs avdrag om lösningen inte är förklarad.
2. 1 poäng för att hitta den homogena lösningen.
3. 1 poäng för att göra rätt ansättning för partikulärlösningen.
4. 1 poäng för att hitta rätt partikulärlösning.
5. 1 poäng för att lyckas anpassa initialdata.
6. Väldigt enkla beräkningsfel skall inte bestraffas.

Fråga 6: [Del 1, Modul 6]

1. Låt $f(x) = 3 + 7(x-3) - 2(x-3)^4 + 3(x-3)^5$. Vad är fjärde ordningens Taylorpolynom till $f(x)$ i punkten $x = 3$?

   [Ange Taylorpolynomet eller "omöjligt att avgöra", ingen motivering krävs.] **(1poäng)**

2. Låt $y(x)$ vara lösningen till följande differentialekvation $2y''(x) - 3y'(x) = 3x^2 + 1$, $y(0) = 1$ och $y'(0) = 2$. Vad är första ordningens Maclaurinpolynom till $y(x)$?

   [Ange Maclaurinpolynomet eller "omöjligt att avgöra", ingen motivering krävs.] **(1poäng)**

3. Beräkna värdet av $f(9/10)$ med maximalt fel 10^{-3} då

$$f(x) = \ln(1 + 3x^2).$$

   [Motivera ditt svar.] **(4poäng)**

Svar fråga 6:

1. $3 + 7(x-3) - 2(x-3)^4$
2. $1 + 2x$
3. Vi använder en Taylorapproximation av $g(y) = \ln(1 + 3y)$ kring $y = 1$. För detta så beräknar vi

$$\begin{aligned}
&g(1) = \ln(4) \Rightarrow \\
&g'(y) = \tfrac{3}{1+3y} \Rightarrow g'(1) = \tfrac{3}{4} \\
&g''(y) = \tfrac{-9}{(1+3y)^2} \Rightarrow g''(1) = \tfrac{-9}{16} \\
&g^{(3)}(y) = \tfrac{54}{(1+3y)^3} \Rightarrow g^{(3)}(1) = \tfrac{54}{64} = \tfrac{27}{32} \\
&g^{(4)}(y) = \tfrac{-9\cdot 54}{(1+3y)^4} \Rightarrow
\end{aligned}$$

   Således så är, enligt Taylors formel,

$$g(y) = \ln(4) + \frac{3}{4}(y-1) - \frac{9}{32}(y-1)^2 + \frac{9}{64}(y-1)^3 - \frac{81}{4}\frac{1}{(1+3y_1)^4}(y-1)^4,$$

   för något y_1 mellan 1 och y.
   Observera att $f(x) = g(x^2)$ så

$$f(9/10) = g(81/100) = \ln(4) - \frac{3}{4}(19/100) - \frac{9}{32}(19/100)^2 - \frac{9}{64}(19/100)^3 - \frac{81}{4}\frac{1}{(1+3y_1)^4}(19/100)^4.$$

Eftersom $y_1 \in [81/100, 1]$ så kan vi skatta resttermen

$$\left|\frac{81}{4}\frac{1}{(1+3y_1)^4}(19/100)^4\right| \leq \frac{81}{4}\frac{1}{(1+3\times 81/100)^3}\frac{1}{5^4} \leq$$

$$\leq \frac{81}{4}\frac{1}{(34/10)^4}\frac{1}{5^4} \leq \frac{81}{4}\frac{1}{5^4}\frac{1}{3^4} \leq \frac{1}{4\cdot 625} < \frac{1}{1000},$$

där vi använde att $\frac{19}{100} < \frac{1}{5}$ och att $1+3\frac{81}{100} = \frac{343}{100} > \frac{34}{10}$.

Vårt svar blir därför

$$f(9/10) \approx \ln(4) - \frac{3}{4}(19/100) - \frac{9}{32}(19/100)^2 - \frac{9}{64}(19/100)^3$$

med ett maximalt fel på 10^{-3}.

Rättningsmall: Delfråga 1 och 2 rättas bara rätt/fel. För delfråga 3 gäller.

1. Minus upp till 2 poäng för dåliga förklaringar.
2. Det viktiga är att studenten kan använda Taylors formel. Att göra en rätt ansättning även om man inte klarar av att skatta felet korrekt skal därför ge 2 poäng.
3. Enkla räknefel som inte förenklar talet skall inte straffas.

Tentamen DEL 2.

Varje fråga tilldelas 6 poäng. Totalt 36 poäng. För C krävs 12 poäng, för B krävs 20 poäng och för ett A krävs 28 poäng.

Fråga X: Ange om du har D eller bättre från en tidigare kursomgång och om du är här för att plussa.

Fråga 7: [Del 2] Låt $F(x) = \int_0^{e^x} \cos(t^2)dt$.

1. Hitta alla lokala maxima till $F(x)$.

[MOTIVERA DITT SVAR.] **(3 poäng)**

2. Hitta det $x \geq 0$ där $F(x)$ antar sitt maxvärde.

LEDTRÅD: *Om $x_1, x_2, ...$ är lokala maxima till $F(x)$ kan du visa att $F(x_{k+1}) \geq F(x_k)$ eller $F(x_{k+1}) \leq F(x_k)$?*

[MOTIVERA DITT SVAR.] **(3 poäng)**

Svar fråga 7:

1. Vi börjar med att hitta de lokala extrempunkterna, dvs de punkter där $F'(x) = 0$. För det så beräknar vi enligt kedjeregeln och analysens huvudsats
$$F'(x) = e^x \cos(e^{2x}).$$
Eftersom $e^x > 0$ så kommer $F'(x) = 0$ om och endast om $\cos(e^{2x}) = 0$, dvs om $e^{2x} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ för $k = 0, 1, 2, ...$ Låt oss kalla de lokala extrempunkterna $x_k = \frac{1}{2}\ln(\pi/2 + k\pi)$ för $k = 0, 1, 2, ...$

För att hitta lokala maxima så undersöker vi om $F''(x_k) \leq 0$. Vi beräknar
$$F''(x) = e^x \cos(e^{2x}) - 2e^{3x}\sin(e^{2x}),$$
eftersom $\cos(e^{2x_k}) = 0$ för alla k så får vi att
$$F''(x_k) = -2e^{3x_k}\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 2(-1)^{k+1}e^{3x_k}.$$
Eftersom $e^{3x_k} > 0$ så får vi att $F''(x_{2k}) < 0$ och $F''(x_{2k+1}) > 0$ för alla $k = 0, 1, 2, ...$ Således är $x_{2k} = \frac{1}{2}\ln(\pi/2 + 2k\pi)$ lokala maxpunkter.

Det återstår att undersöka randpunkten $x = 0$. Då $x = 0$ så är $F'(0) = \cos(1) \geq 0$ så $x = 0$ är inte en lokal maxpunkt då derivatan måste vara icke positiv för att en vänster randpunkt skall kunna vara ett lokalt maximum.

Svar delfråga 1: Följande punkter: $x_{2k} = \frac{1}{2}\ln(\pi/2 + 2k\pi)$ för $k = 0, 1, 2, 3, ...$ är alla lokala maxima då $x \geq 0$.

2. Vi använder ledtråden och undersöker skillnaden mellan två lokala maxima

$$F(x_{2k+2})-F(x_{2k})=\int_{\sqrt{\pi/2+2k\pi}}^{\sqrt{\pi/2+2k\pi+2\pi}}\cos(t^2)dt=\left\{\begin{array}{l}\text{subst.}t^2=s\\ dt=\frac{1}{2\sqrt{s}}ds\end{array}\right\}=\frac{1}{2}\int_{\pi/2+2k\pi}^{\pi/2+2k\pi+2\pi}\frac{\cos(s)}{\sqrt{s}}ds=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\pi/2+2k\pi}^{\pi/2+2k\pi+\pi}\underbrace{\frac{\cos(s)}{\sqrt{s}}}_{\leq 0}ds+\frac{1}{2}\int_{\pi/2+2k\pi+\pi}^{\pi/2+2k\pi+2\pi}\underbrace{\frac{\cos(s)}{\sqrt{s}}}_{\geq 0}ds. \tag{2}$$

Vi observerar att eftersom $\frac{1}{\sqrt{s}}$ är avtagande och $\cos(s)\leq 0$ på $[\pi/2+2k\pi,\pi/2+2k\pi+\pi]$ så kommer

$$\frac{\cos(s)}{\sqrt{s}}\leq\frac{\cos(s)}{\sqrt{\pi/2+2k\pi+\pi}}\text{ då } s\in[\pi/2+2k\pi,\pi/2+2k\pi+\pi],$$

och på samma sätt

$$\frac{\cos(s)}{\sqrt{s}}\leq\frac{\cos(s)}{\sqrt{\pi/2+2k\pi+\pi}}\text{ då } s\in[\pi/2+2k\pi+\pi,\pi/2+2k\pi+2\pi],$$

eftersom $\cos(z)\geq 0$ på $[\pi/2+2k\pi+\pi,\pi/2+2k\pi+2\pi]$. Vi observerar också att dessa olikheter är strikta i det inre av intervallet.

Vi kan använda dessa olikheter i (2) och härleda att

$$F(x_{2k+2})-F(x_{2k})<\frac{1}{2\sqrt{\pi/2+2k\pi+\pi}}\left[\int_{\pi/2+2k\pi}^{\pi/2+2k\pi+\pi}\cos(s)ds+\int_{\pi/2+2k\pi+\pi}^{\pi/2+2k\pi+2\pi}\cos(s)ds\right]=0$$

Där vi använde att vi integrerar $\cos(s)$ över en hel perjod i den sista olikheten.

Det följer att $F(x_{2k})$ är en strängt avtagande följd i k och det maximala värdet hittas för $k=0$. Vi får således

$$\max_{x\geq 0}F(x)=F(x_0).$$

Svar: Maximum hittas i $x_0=\frac{1}{2}\ln(\pi/2)$.

Rättningsmall: Deluppgift 1 är ganska standard. 1 poäng för att hitta extrempunkter, 1 poäng för att hitta de extrempunkter som har negativ andraderivata, 1 poäng för att verifiera att $x=0$ inte är en lokal maxpunkt. Enkla beräkningsfel skall inte bestraffas - men mer alvarliga beräkningsfel (såsom att glöma den inre derivatan vid beräkning av $F'(x)$) skall bestraffas.

Deluppgift 2 är mycket svårare. Det viktiga är att se om studenten kan skatta integraler. Om integralen skattas rätt skall två poäng ges. Enkla räknefel skall inte bestraffas om de inte är flera eller leder till avsevärda förenklingar av uppgiften.

Icke, eller dåligt, motiverade lösningar skall bestraffas med upp till två minspoäng.

Fråga 8: [Del 2] Approximera $e^{x^2}\cos(x^3)$ på $[-1/2,1/2]$ med ett polynom så att felet blir maximalt 10^{-3}.

[FULLSTÄNDIG MOTIVERING KRÄVS.] **(6poäng)**

Svar fråga 8: Vi använder standardutvecklingarna för Maclaurinpolynom

$$e^y=1+y+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{6}y^3+\frac{1}{24}e^{y_0}y^4$$

och

$$\cos(z)=1-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{24}\cos(z_0)z^4$$

för några tal mellan y_0 och z_0 så att y_0 ligger mellan 0 och y och z_0 mellan 0 och z.

Speciellt så får vi att om $x\in[-1/2,1/2]$ och $y=x^2$, dvs $|y|\leq\frac{1}{4}$, så kommer

$$\Big|e^{x^2}\underbrace{-1-x^2-\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{6}x^6}_{=-p(x)}\Big|\leq\frac{1}{24\cdot 4^4}e^{\frac{1}{4}}\leq\frac{2}{12\cdot 256}=\frac{1}{1530},$$

där vi använde att e^y är växande så $|e^y|\leq e^{1/4}$ om $|y|\leq 1/4$ samt att $e^{1/4}<2$ (eftersom $e<2^4=16$).

På samma sätt får vi med $z=x^3$, vilket gör att om $x\in[-1/2,1/2]$ så kommer $|z|\leq 1/8$, och $|\cos(z_0)|\leq 1$

$$\Big|\cos(x^3)\underbrace{-1+\frac{1}{2}x^6}_{=-q(x)}\Big|\leq\frac{1}{24\cdot 8^12}\leq\frac{1}{3\cdot 2^{39}}\leq\frac{1}{2^{40}}<\frac{1}{10^{12}}$$

där vi också använde att $2^{10} = 1024 > 10^3$ i den sista olikheten. Vi förstår $p(x)$ och $q(x)$ att vara definierade som de polynom som indikeras i ekvationerna.

Vi får därför, genom att använda elementär algebra och triangelolikheten, att

$$\left|e^{x^2}\cos(x^3) - p(x)q(x)\right| = \left|-\left(e^{x^2} - p(x)\right)\left(\cos(x^3) - q(x)\right) + (e^{x^2} - p(x))\cos(x^3) + (\cos(x^3) - q(x))e^{x^2}\right| \leq$$

$$\leq \underbrace{\left|e^{x^2} - p(x)\right|}_{\leq 10^{-3}}\underbrace{\left|\cos(x^3) - q(x)\right|}_{\leq 10^{-12}} + \underbrace{\left|e^{x^2} - p(x))\right|}_{\leq \frac{1}{1530}}|\cos(x^3)| + \underbrace{\left|\cos(x^3) - q(x)\right|}_{\leq 10^{-12}}\left|e^{x^2}\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{1530} + \frac{3}{10^{12}} \leq 10^{-3},$$

där vi också använde att $|\cos(x^3)| \leq 1$ och $|e^{x^2}| \leq 2$ då $x \in [-1/2, 1/2]$.

Vi har alltså visat att

$$e^{x^2}\cos(x^3) \approx p(x)q(x) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{2} - \frac{x^{10}}{4} - \frac{x^{12}}{12}$$

med maximalt fel 10^{-3} då $x \in [-1/2, 1/2]$.

Rättningsmall: Det viktiga i den här uppgiften är att kunna göra svåra skattningar med Taylorserier.

1. 1 poäng för att kunna beräkna elementära Taylorserier (dvs Taylorserien av cos och e^x).
2. 1 poäng för att göra rimliga ansättningar (tex att skriva funktionen som $e^y\cos(z)$ och därigenom förenkla beräkningarna).
3. 2 poäng för att kunna skatta feltermerna i y och z (speciellt så skall $y \in [0, 1/4]$ och $z \in [-1/8, 1/8]$ användas).
4. 2 poäng för att skatta felet för produkten av Taylorserierna.
5. upp till -2 poäng för dåliga motiveringar.

Min gissning är att den här uppgiften kommer att lösas på många olika sätt. Rätt svar skall ge full poäng. Men en dålig metod (såsom *brute force*) skall bestraffas om den leder till fel eller blir oläslig.

Fråga 9: Låt $f(x) = x^3 - 4x^2 - 6x + 24 - (x - 5/2)\ln(x)$.

1. Givet att $x_0 = 5/2$ är en approximativ lösning till ekvationen $f(x) = 0$. Använd Newton-Raphsons metod (en iteration är tillräckligt) för att hitta en bättre approximation x_1 till lösningen.

   [Fullständig motivering krävs.] **(3poäng)**

2. En beräkning med miniräknare ger att $f(x_1) \approx 0.0071$. Bevisa att x_1, från deluppgift 1, ligger inom 10^{-2} från ett riktigt nollställe till $f(x) = 0$.

   [Fullständig motivering krävs.] **(3poäng)**

Svar fråga 9:

1. Enligt Newton-Raphsons metod så borde

   $$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

   vara en bättre approximation till lösningen. Vi beräknar därför

   $$f'(x) = 3x^2 - 8x - 6 - \ln(x) - \frac{x - 5/2}{x}$$

   vilket ger

   $$f'(5/2) = \frac{3 \cdot 25}{4} - \frac{40}{2} - 6 - \ln\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{29}{4} - \ln\left(\frac{5}{2}\right).$$

   Vi får också att

   $$f(5/2) = \frac{125}{8} - 25 - \frac{30}{2} + 24 = -\frac{3}{8}.$$

   Således så är

   $$x_1 = \frac{5}{2} - \frac{\frac{3}{8}}{\frac{29}{4} + \ln\left(\frac{5}{2}\right)} = \frac{5}{2} - \frac{3}{58 + 8\ln\left(\frac{5}{2}\right)},$$

   vilket är vårt svar.

2. Vi vill använda medelvärdessatsen för att skatta felet. Så antag att $f(x^*) = 0$ och att $x^* \approx x_1$. Enligt medelvärdessatsen så gäller
$$f(x_1) - f(x^*) = f'(\xi)(x_1 - x^*) \Rightarrow |x_1 - x^*| = \left|\frac{f(x_1)}{f'(\xi)}\right|, \tag{3}$$
för något ξ mellan x_1 och x^*. Eftersom vi vet vad $f(x_1)$ är (givet i uppgiften) så räcker det att uppskatta $f'(\xi)$ för att skatta felet $|x_1 - x^*|$. Eftersom vi inte vet vad ξ är så måste vi först hitta ett intervall där vi kan vara säkra på att ξ ligger och sen skatta $f'(x)$ för alla x i det intervallet.

Vi vet att $f(5/2) < 0$ från deluppgift 1. Vi kan också enkelt beräkna
$$f(2) = 4 + \frac{\ln(2)}{2} > 0$$
så, enligt satsen om mellanliggande värden så har $f(x)$ ett nollställe i $[2, 2/5]$. Vi kan därför anta att $x^* \in [2, 5/2]$, vi vet redan att $x_1 \in [2, 5/2]$ enligt deluppgift 1. Eftersom ξ ligger mellan x_1 och x^* så kan vi dra slutsatsen att $\xi \in [2, 5/2]$.

För alla $x \in [2, 5/2]$ så gäller det att
$$f'(x) = 3x^2 - 8x - 6 - \ln(x) - \frac{x - 5/2}{x} \leq \frac{75}{4} - 16 - 6 - \ln(2) = -\frac{13}{4} - \ln(2) \leq -\frac{13}{4},$$
där vi ersatte varje positiv term med det maximala värdet i intervallet och varje negativ med det minimala. Vi kan dra slutsatsen att
$$|f'(x)| \geq \frac{13}{4} \quad \text{för alla } x \in [2, 5/2]$$
och därför så $|f'(\xi)| \geq 13/4$. Använder vi detta och $f(x_1) \approx 0.0071$ i (3) så får vi
$$|x_1 - x^*| \leq \frac{0.0071}{13/4} \leq 10^{-2}$$
vilket skulle visas.

Rättningsmall: Den här frågan testar, naturligtvis, förmågan att använda Newton-Raphsons metod. Men den testar även brädden av kunskap (om studenten har fokuserat på de mindre centrala delarna i kursen.).

1. I delfråga 1 så är det viktigt att kunna använda Newton-Raphsons metod. Jag är speciellt intresserad av om man använder rätt formel - det är inte ett minnestest utan ett test om studenten har förstått idéen och kan härleda uttrycket.
   (a) Att använda rätt formel 2 poäng.
   (b) Att beräkna x_1 på ett korrekt sätt 1 poäng. Att endast visa att man kan derivera skall ge maximalt 1 poäng.
2. Delfråga 2 är mycket svårare än delfråga 1. Jag kan tänka mig att svaren kommer att vara väldigt olika och att rättningsmallen kommer att vara till föga hjälp. Den skall rättas enligt följande.
   (a) 1 poäng för att visa att det ligger ett nollställe mellan 2 och 5/2.
   (b) 1 poäng för att skatta derivatan.
   (c) 1 poäng för att använda medelvärdessatsen rätt.

Dåligt motiverade svar skall straffas med upp till två minuspoäng.

Fråga 10: [Del 2]

1. Beräkna följande gränsvärde:
$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x \cos(\ln(1+t))dt}{e^x - 1}.$$
[EN FULLSTÄNDIG OCH NOGRANN MOTIVERING KRÄVS, DU FÅR INTE ANVÄNDA DEL 2 UTAN ATT BEVISA DEN.] **(3poäng)**

2. Visa att i allmänhet om $f(x)$ är kontinuerligt deriverbar och $g(x)$ två gånger kontinuerligt deriverbar i en omgivning av $x = 0$, och om $g(0) = 0$, $g'(0) \neq 0$ då kommer
$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x f(t)dt}{g(x)} = \frac{f(0)}{g'(0)}.$$
[ETT KOMPLETT BEVIS KRÄVS DÄR DU NOGA REFERERAR TILL KÄNDA SATSER SOM DU ANVÄNDER.] **(3poäng)**

Svar fråga 10:

1. Vi vet att $\cos(x)$ är kontinuerlig för alla x och $\ln(1+t)$ är kontinuerlig för $|t|<1$, speciellt för t nära noll. Därför så har $\cos(\ln(1+x))$ en primitiv funktion

$$F(x) = \int_0^x \cos(\ln(1+t))dt$$

definierad för $|x|<1$. Enligt analysens huvudsats så är F deriverbar och därför kontinuerlig. Det följer att

$$\lim_{x\to 0} F(x) = F(0) = 0,$$

eftersom integralen från 0 till 0 är noll. Vidare så vet vi, eftersom e^x är kontinuerlig, att $\lim_{x\to 0}(e^x - 1) = e^0 - 1 = 0$. Gränsvärdet är därför av typen "$\frac{0}{0}$" och vi borde kunna använda l'Hospitals regel. För att använda l'Hospitals regel så måste vi visa att $F(x)$ och $e^x - 1$ är två gånger kontinuerligt deriverbara. Att $e^x - 1$ är oändligt deriverbar följer av att e^x och att alla konstanter är det. Vi vet också, från analysens huvudsats, att $F'(x) = \cos(\ln(1+x))$ och $\cos(\ln(1+x))$ är kontinuerligt deriverbar i en omgivning av noll eftersom $\cos(\ln(1+x))$ är en sammansättning av $\ln(1+x)$ vilken är deriverbar i en omgivning av noll och cos vilken är deriverbar på hela $\mathbb{R}$. Det följer att $F'(x)$ är kontinuerligt deriverbar i en omgivning av noll och därför att $F(x)$ är två gånger kontinuerligt deriverbar.

Vi får därför använda l'Hospitals regel och beräkna

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{e^x - 1} = \frac{F'(0)}{e^0} = \frac{\cos(\ln(1))}{1} = 1.$$

Svar: Gränsvärdet är 1.

2. Vi kan bevisa detta genom att använda l'Hospitals regel som i föregående fråga. Men vi väljer att göra ett direkt bevis istället (om någon skulle läsa dessa lösningar så kanske det skulle vara lärorikt att se en annan metod). Eftersom $f(x)$ är kontinuerligt deriverbar så kan vi skriva, enligt Taylors sats, $f(t) = f(0) + B_f(t)x$ där $B_f(t)$ är en begränsad funktion. På samma sätt så kan vi skriva $g(x) = g(0) + g'(0)x + B_g(x)x^2 = g'(0)x + B_g(x)$ där $B_g(x)$ är begränsad, vi använde också att $g(0) = 0$ enligt hypotes.

Vi får således

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x f(t)dt}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f(0)x + \int_0^x B_f(t)tdt}{g'(0)x + B_g(x)x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{f(0) + \frac{1}{x}\int_0^x B_f(t)tdt}{g'(0) + B_g(x)x}. \tag{4}$$

Eftersom $B_g(x)$ är begränsad nära noll så kommer $\lim_{x\to 0}(g'(0) + B_g(x)x) = g'(0) \neq 0$. Vidare så gäller det enligt integralkalkylens medelvärdessats att

$$\frac{1}{x}\int_0^x B_f(t)tdt = B_f(\xi_x)\xi_x$$

för något ξ_x så att $|\xi_x| \leq |x|$. Eftersom $B_f(\xi_x)$ är begränsad nära noll och $|\xi_x| \leq |x| \to 0$ då $x \to 0$ så följer det att

$$\lim_{x\to 0}\left(f(0) + \frac{1}{x}\int_0^x B_f(t)tdt\right) = \left\{\begin{array}{c}\text{summa}\\ \text{regeln}\end{array}\right\} = \lim_{x\to 0} f(0) + \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x B_f(t)tdt =$$

$$= f(0) + \lim_{x\to 0} B_f(\xi_x)\xi_x = f(0).$$

Vi kan nu använda kvotregeln på (4) och beräkna

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to 0}\left(f(0) + \frac{1}{x}\int_0^x B_f(t)tdt\right)}{\lim_{x\to 0}(g'(0) + B_g(x)x)} = \frac{f(0)}{g'(0)}$$

vilket skulle bevisas.

Rättningsmall:

1. Delfråga 1 testar främst om studenten kan sätta ihop olika teoretiska moment till nya situationer. I det här fallet analysens huvudsats och l'Hospitals regel.
   (a) 1 poäng för att verifiera att täljare och nämnare är noll.
   (b) 1 poäng för att visa att l'Hospitals regel är applicerbar.
   (c) 1 poäng för att beräkna gränsvärdet.

2. Delfråga 2 testar om studenten kan bevisa en ny sats - i det här fallet en enkel sats. Jag vet inte riktigt hur en rättningsmall skall skrivas för ett bevis. Så det ligger mycket på rättaren att avgöra vad som är stringent.

Fråga 11: [Del 2] Antag att $f(x)$ och $g(x)$ är integrerbara på $[0,1]$ och att $a, b \geq 0$ är givna tal. Bevisa, direkt utifrån definitionen, att $af(x)+bg(x)$ är integrerbar.

[FULLSTÄNDIG MOTIVERING KRÄVS.] **(6poäng)**

Svar fråga 11: Enligt antagandet att f och g är integrerbara så finns det för varje $\epsilon > 0$ fyra trappfunktioner $\Phi_{f,\epsilon}$, $\Psi_{f,\epsilon}$, $\Phi_{g,\epsilon}$ samt $\Psi_{g,\epsilon}$ så att $\Phi_{f,\epsilon}$ och $\Psi_{f,\epsilon}$ har indelningen $P_{f,\epsilon} = \{p_1 = 0, p_2, p_3, ..., p_N = 1\}$ och $\Phi_{g,\epsilon}$ och $\Psi_{g,\epsilon}$ har indelningen $P_{g,\epsilon} = \{q_1 = 0, q_2, q_3, ..., q_M = 1\}$ för några naturliga tal N och M. Vidare så gäller det att

$$\Phi_{f,\epsilon}(x) \leq f(x) \leq \Psi_{f,\epsilon}(x), \tag{5}$$

$$\Phi_{g,\epsilon}(x) \leq g(x) \leq \Psi_{g,\epsilon}(x) \tag{6}$$

samt att

$$I(\Psi_{f,\epsilon}) - I(\Phi_{f,\epsilon}) < \epsilon \text{ och } I(\Psi_{g,\epsilon}) - I(\Phi_{g,\epsilon}) < \epsilon. \tag{7}$$

Vi vill visa att det, givet $h(x) = af(x) + bg(x)$ och ett $\epsilon > 0$, finns två trappfunktioner $\Phi_{h,\epsilon}$ och $\Psi_{h,\epsilon}$ så att

$$\Phi_{h,\epsilon}(x) \leq h(x) \leq \Psi_{h,\epsilon}(x), \tag{8}$$

och

$$I(\Psi_{h,\epsilon}) - I(\Phi_{h,\epsilon}) < \epsilon. \tag{9}$$

Låt oss välja $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{1+2a}$ och $\epsilon_2 = \frac{\epsilon}{1+2b}$, ettan i nämnaren är bara där för att försäkra oss om att ϵ_1 och ϵ_2 är väldefinierade även om $a = 0$ eller $b = 0$. Enligt antagande så finns det nu fyra trappfunktioner Φ_{f,ϵ_1}, Ψ_{f,ϵ_1}, Φ_{g,ϵ_2} samt Ψ_{g,ϵ_2} med motsvarande indelningar P_{f,ϵ_1} och P_{g,ϵ_2} så att (5)-(7) håller med ϵ_1 och ϵ_2 istället för ϵ. Vi kan anta att alla fyra trappfunktioner har samma indelning $P_\epsilon = \{x_0, x_1, ..., x_M\}$, detta eftersom funktionen förändras inte om vi lägger till fler punkter i indelningen.

Vi definierar nu $\Phi_{h,\epsilon} = a\Phi_{f,\epsilon_1} + b\Phi_{g,\epsilon_2}$ och $\Psi_{h,\epsilon} = a\Psi_{f,\epsilon_1} + b\Psi_{g,\epsilon_2}$. Eftersom $\Phi_{h,\epsilon}$ och $\Psi_{h,\epsilon}$ bara antar ändligt antal värden så är de trappfunktioner. Vidare så gäller det att

$$\Phi_{h,\epsilon}(x) = a\Phi_{f,\epsilon_1}(x) + b\Phi_{g,\epsilon_2}(x) \leq \underbrace{af(x) + bg(x)}_{=h(x)} \leq a\Psi_{f,\epsilon_1}(x) + b\Psi_{g,\epsilon_2}(x) = \Psi_{h,\epsilon}(x)$$

där vi använde att $a, b \geq 0$ och (5) och (6). Vi har därmed visat att $\Phi_{h,\epsilon}$ och $\Psi_{h,\epsilon}$ uppfyller (8). Det återstår att visa (9).

För att visa (9) så antar vi att $\Phi_{f,\epsilon_1} = c_k^-$ och $\Psi_{f,\epsilon_1} = c_k^+$ på $]x_{k-1}, x_k[$ och $\Phi_{g,\epsilon_1} = d_k^-$ och $\Psi_{g,\epsilon_1} = d_k^+$ på $]x_{k-1}, x_k[$. Då får vi enligt definitionen av I

$$I(\Psi_{h,\epsilon}) - I(\Phi_{h,\epsilon}) = \sum_{k=1}^{M}(ac_k^+ + bd_k^+)(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{M}(ac_k^- + bd_k^-)(x_k - x_{k-1}) =$$

$$a\underbrace{\sum_{k=1}^{M} c_k^+(x_k - x_{k-1})}_{=I(\Psi_{f,\epsilon_1})} + b\underbrace{\sum_{k=1}^{M} d_k^+(x_k - x_{k-1})}_{=I(\Psi_{g,\epsilon_g})} - a\underbrace{\sum_{k=1}^{M} c_k^-(x_k - x_{k-1})}_{=I(\Phi_{f,\epsilon_1})} - b\underbrace{\sum_{k=1}^{M} d_k^-(x_k - x_{k-1})}_{=I(\Phi_{g,\epsilon_2})} =$$

$$= a\left(I(\Psi_{f,\epsilon_1}) - I(\Phi_{f,\epsilon_1})\right) + b\left(I(\Psi_{g,\epsilon_2}) - I(\Phi_{g,\epsilon_2})\right) < \left\{ \begin{array}{c} (7) \text{ med} \\ \epsilon_1,\ \epsilon_2 \text{ som } \epsilon \end{array} \right\} < a\epsilon_1 + b\epsilon_2 < \epsilon,$$

där vi använde att $a\epsilon_1 = \frac{a}{1+2a}\epsilon < \frac{\epsilon}{2}$ och motsvarande för ϵ_2 i den sista olikheten. Detta bevisar att $\Psi_{h,\epsilon}$ och $\Phi_{h,\epsilon}$ även uppfyller (9) och därmed så är satsen bevisad.

Fråga 12: [Del 2] Låt $f(x) \geq 0$ vara en funktion på $[0,1]$. Låt $t \geq 0$ och Y_t vara rotationsytan som fås om grafen av $tf(x)$ roteras ett varv kring $x-$axeln och låt V_t vara motsvarande rotationsvolym.

1. Hitta alla tal $t_0 \geq 0$ så att $Y_{t_0} = V_{t_0}$ då $f(x) = \sqrt{x}$.

[FULLSTÄNDIG MOTIVERING KRÄVS.] **(3poäng)**

2. Antag att $f(x_0) > 0$ i någon punkt x_0, och att $f(x)$ är kontinuerligt deriverbar på $[0,1]$. Låt $T = \frac{2}{\sup_{x\in[0,1]} f(x)}$ och bevisa att för alla $t \in]0, T]$ så gäller det att $Y_t \geq V_t$.

[ETT FULLSTÄNDIGT BEVIS KRÄVS.] **(3poäng)**

Även detta är ett bevis och det ligger på rättaren att avgöra vad som är stringent.

Svar fråga 12:

1. Vi vet att formeln för en rotationsyta är

$$Y_t = 2\pi \int_0^1 tf(x)\sqrt{1+t^2|f'(x)|^2}dx.$$

Med $f = \sqrt{x}$ så får vi

$$Y_t = 2\pi t \int_0^1 \sqrt{x}\sqrt{1+\frac{t^2}{4x}}dx = 2\pi t \int_0^1 \sqrt{x+\frac{t^2}{4}}dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{subst.} s = \sqrt{x+\frac{t^2}{4}} \\ 2sds = dx \end{array} \right\} =$$

$$= 4\pi t \int_{\frac{t}{2}}^{\sqrt{1+t^2/4}} s^2 ds = \frac{4\pi t}{3}\left(\left(1+\frac{t^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{t^3}{8}\right).$$

Använder vi formeln för rotationsvolymen $V_t = \pi\int_0^1 t^2 f^2(x)dx$ så får vi

$$V_t = \pi t^2 \int_0^1 xdx = \frac{\pi t^2}{2}.$$

Likhet $Y_t = V_t$ uppstår därför då $t = 0$ eller då $t > 0$ och

$$\frac{8}{3}\left(\left(1+\frac{t^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{t^3}{8}\right) = t \Rightarrow \left(1+\frac{t^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{t^3}{8} + \frac{3t}{8}.$$

Om vi kvadrerar båda led och förenklar så leder detta till

$$t^4 + \frac{13}{2}t^2 + \frac{32}{3} = 0 \Rightarrow t^2 = -\frac{13}{4} \pm \sqrt{\frac{169}{16} - \frac{32}{3}}.$$

Vi ser att högerledet är ett komplext tal eftersom $\frac{169}{16} - \frac{32}{3} < 0$. Därför så finns det inga lösningar $t > 0$.

Svar delfråga 1: $t = 0$ är den enda lösningen.

2. För att bevisa detta så antar vi att $t \in]0, T]$ där $T = \frac{2}{\sup_{x\in[0,1]} f(x)}$. Då gäller

$$Y_t = 2\pi \int_0^1 tf(x)\sqrt{1+t^2|f'(x)|^2}dx \geq \left\{ \begin{array}{l} \text{eftersom } f \geq 0 \\ \text{och } \sqrt{1+t^2|f'(x)|^2} \geq 1 \end{array} \right\} \geq$$

$$\geq \pi \int_0^1 2tf(x)dx \geq \left\{ \begin{array}{l} \text{eftersom} \\ 2 \geq Tf(x) \geq tf(x) \end{array} \right\} \geq \pi \int_0^1 t^2 f(x)^2 dx = V_t.$$

Detta är vad som skulle bevisas.

Rättningsmall:

1. Delfråga 1 rättas enligt följande.
   (a) 1 poäng för att kunna formeln för rotationsyta och rotationsvolym (detta är inte en minneskontroll utan en test av förmågan att för sig själv härleda).
   (b) 1 poäng för att härleda ekvationen i t, dvs att lösa integralerna.
   (c) 1 poäng för att kunna lösa fjärdegradspolynomet i t.
2. Delfråga 2 är återigen ett bevis och kollar förmågan att göra skattningar.
   (a) 2 poäng för skattningen $\sqrt{1+t^2|f'|^1} \geq 1$.
   (b) 1 poäng för att kunna använda $2 \geq Tf(x) \geq tf(x)$.

minus upp till två poäng för dåliga förklaringar.

Tankar om Tentan och Betygsgränser.

Tentans del 1 skall testa förståelse upp till ett betyg D. För det så skall man kunna göra viktiga kursens beräkningar; d.v.s. manipulera formler, derivera, integrera, lösa differential ekvationer och beräkna Taylorpolynom. Man skall också ha en viss förståelse för vad man gör. Tanken bakom del 1 är därför ganska enkel. Uppgift 1 testar främst formelmanipulation (log, trig och polynom beräkningar). Fråga 2, 3 och 4 testar derivering och integrering, specifikt de viktiga tekniker som ingår i kursen (kedje och produktregeln, variabelsubstitution, partiell integration och partialbråksuppdelning). Fråga 5 och 6 testar lösning av diff ekvationer och Taylorapproximation. Kortfrågorna säkerställer att man har en elementär känsla för teorin och en viss intuitiv förståelse av kursmaterialet. Om man kan göra alla tal i del 1 så har man därför visat att man förstår kursens grundläggande element.

Del 2 av tentan skall kolla förståelse för C, B och A nivå. För ett C skall man kunna genomföra svårare beräkninar och lösa vissa sammansatta problem. Fråga 7.1 (lite knepigare derivering och optimering), 8 (knepig Taylorskattning - som man borde kunna om man gjorde inl. 2), 9.1 (elementär Newton-Raphson) och kanska 10.1 eller 12.1 borde man också kunna på C nivå. Dessa tal ger 15-18 poäng så om man ligger på C nivå i sina kunskaper så borde man kunna få ett C även om man har en dålig dag om missar något poäng.

För ett B så bör man även visa lite djupare teoretisk förståelse och förutom att få de 18 poäng som testar C nivå så borde man kunna lösa antingen 7.2 eller 10.2 samt 12.2 och få en del poäng på fråga 11. Givetvis så slarvar man ibland och missar några enstaka poäng men en god B student borde kunna komma upp i 26 poäng.

För ett A så ska man i princip kunna lösa alla tal på tentan - men med tanke på tentastress etc. så är gränsen satt till 28 poäng så att möjligheten finns att få ett A även en dålig dag.