Tentamen SF1602 10 Mars 2014

Hjälpmedel: Papper, penna.

Totalt 6 poäng per uppgift. För godkänt på modulen krävs 4 poäng.

För E krävs 4 godkända moduler. För ett D krävs 5 godkända moduler. Med 5 godkända moduler ges rätten att skriva tentamen del 2 vilken ger möjlighet till C,B och A. Modulresultat från tidigare kursomgångar gäller ej.

Om plussning: Om du redan är godkänd på kursen med ett D eller bättre så behöver du inte skriva del 1. Om du inte är godkänd på kursen eller har ett E på kursen så måste du skriva del 1. Du behåller dock de moduler som du klarade genom KSar eller inlämningsuppgifter under kursomgången HT2013. Moduler som klarats vid tidigare kursomgångar eller tentamen räknas inte.

Tentamen DEL 1.

Fråga 1: [Del 1, Modul 1]

1. Hur många av följande gränsvärden är 0?

   a) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$, **b)** $\lim_{n\to\infty}\frac{12^n}{n!}$, **c)** $\lim_{x\to-\infty}\frac{(x-2)^2(x+3)}{4x^5+2x^2+8}$,

   d) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2(x)}{x}$, **e)** $\lim_{x\to a}\frac{(x-a)^2+1}{(x+a^2)(x-1)(x-a)}$.

   [Svara med ett tal 0,1,2,...,5. Ingen motivering krävs.] **(1 poäng)**

2. Ange ett exempel på en kontinuerlig definition $f(x)$ definierad på hela $\mathbb{R}$ så att det för varje $\epsilon > 0$ existerar ett $C_\epsilon > 0$ så att

   $$x > C_\epsilon \Rightarrow f(x) < \epsilon$$

   men $\lim_{x\to\infty} f(x) \neq 0$.

   [Ingen motivering krävs.] **(1 poäng)**

3. Hitta alla lösningar till följande ekvation: $|1+\cos(x^2)| = \sqrt{3}\sin(x^2)$.

   [Fullständig motivering krävs.] **(4 poäng)**

Fråga 2: [Del 1, Modul 2]

1. Ange hur $\frac{df}{dx}$ definieras.

   [Ingen motivering krävs.] **(1poäng)**

2. Låt $f(x)$ vara en deriverbar funktion på $\mathbb{R}$. Antag vidare att $f(0) = 1$ och att $f'(x) \geq 1$ för alla x. Ange det område där $f(x) \geq x$ med säkerhet.

   [Ange ett område i $\mathbb{R}$ eller "omöjligt att avgöra". Ingen motivering krävs.] **(1poäng)**

3. Låt K vara en kropp med massa m som rör sig med hastigheten $v(t)$. Enligt energikonserverings principen så kommer den totala den totala energin, dvs summan av den potentiella energin $P(t)$ och rörelseenergin $\frac{m}{2}v(t)^2$, att vara konstant lika med E (med andra ord $P(t)+\frac{m}{2}v(t)^2 = E$). Antag att den potentiella energin $P(t)$ har tangenten $3(t-t_0)+2$ i tidpunkten t_0. Vad är kroppens hastighet och acceleration i tidpunkten t_0 som en funktion av E och m? Du får antaga att $P(t)$ och $V(t)$ är deriverbara.

   [Fullständig motivering krävs.] **(4poäng)**

Fråga 3: [Del 1, Modul 3]

1. Ange en funktion $f(x)$ så att $f(x) < 0$ för alla $x \in [-2,2]$ och $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ är växande för $x \in [0,2]$.

   [Ange $f(x)$ eller "omöjligt", ingen motivering krävs.] **(1poäng)**

2. Låt $f(x)$ vara en integrerbar funktion på $[-1,1]$ med partialbråksuppdelning $p(x) = \frac{3x}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{(x-2)}$. Vad är $\int_{-1}^{1}(f(x) - p(x))\,dx$?

[Ange integralens värde, "omöjligt att avgöra" eller odefinierad, ingen motivering krävs.] **(1poäng)**

3. Bestäm alla primitiva funktioner, definierade för $0 < x < \pi$, till $f(x) = \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)+\sin^3(x)}$. Ange noga alla satser du använder.

[Fullständig motivering krävs.] **(4poäng)**

Fråga 4: [Del 1, Modul 4]

1. Vad är värdet av $\int_{-1}^{1}\sum_{k=1}^{10} a_k x^{2k+1} dx$ där a_k är den k :te decimalen i π.

[Ange integralens värde eller "omöjligt att avgöra", ingen motivering krävs.] **(1poäng)**

2. Låt $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{om } x = \frac{1}{2} \\ -1 & \text{om } x \neq \frac{1}{2}. \end{cases}$ Beräkna integralen $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

[Ange integralens värde eller "odefinierad", ingen motivering krävs.] **(1poäng)**

3. Förklara noga varför varför följande beräkning är felaktig och analysera sedan integralen på ett matematiskt korrekt sätt,

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{x=-1}^{1} = -\frac{1}{1} + \frac{1}{-1} = -2.$$

Var noga med att beskriva de matematiska begrepp och satser du använder.

[Fullständig motivering krävs] **(4poäng)**

Fråga 5: [Del 1, Modul 5]

1. Ange en andra ordningens differentialekvation som inte har några lösningar.

[Ange diff ekvationen eller "omöjligt". Ingen motivering krävs] **(1poäng)**

2. Ange en första ordningens linjär differentialekvation som bara har strikt växande lösningar.

[Ange diff ekvationen eller "omöjligt". Ingen motivering krävs] **(1poäng)**

3. Hitta lösningen $y(x)$ till följande differentialekvation

$$(1 + x^2)y'(x) + xy(x) = 3x$$

och $y(0) = 1$.

[Fullständig motivering krävs.] **(4poäng)**

Fråga 6: [Del 1, Modul 6]

1. Låt $f(x)$ och $g(x)$ vara två oändligt deriverbara funktioner så att $f(3) = g(3)$, $f'(3) = g'(3)$, $f''(3) = g''(3)$, $f^{(3)}(3) = g^{(3)}(3)$, $f^{(4)}(3) = g^{(4)}(3)$ och $f^{(5)}(3) = g^{(5)}(3)$. Ange tredje ordningens Taylorpolynom till funktionen $h(x) = f(x) - g(x)$ i punkten $x_0 = 3$.

[Ange Taylorpolynomet eller "omöjligt", ingen motivering krävs.] **(1poäng)**

2. Ange två funktioner $f(x)$ och $g(x)$ definierade i en omgivning av $x_0 = 2$ så att l'Hospitals regel inte är tillämpbar för att beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{g(x)}$.

[Ange $f(x)$ och $g(x)$ eller "omöjligt", ingen motivering krävs.] **(1poäng)**

3. Beräkna andra ordningens Taylorutveckling i punkten $x_0 = 2$ till

$$f(x) = \left(1 + x^2\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Ange ditt svar med restterm på valfri form.

[Motivera ditt svar.] **(4poäng)**

Tentamen DEL 2.

Varje fråga tilldelas 6 poäng. Totalt 36 poäng. För C krävs 12 poäng, för B krävs 20 poäng och för ett A krävs 28 poäng.

Fråga X: Ange om du har D eller bättre från en tidigare kursomgång och om du är här för att plussa.

Fråga 7: [Del 2] Bestäm den punkt på grafen till $f(x) = x^2 - 2x + 12$ som har en tangent som går genom punkten $(3, -4)$. Skissa din lösning.

[MOTIVERA DITT SVAR.] **(6 poäng)**

Fråga 8: [Del 2] Beräkna följande integral

$$\int_1^2 \frac{x^4+1}{x^2(x^2+1)^2}dx.$$

[FULLSTÄNDIG MOTIVERING KRÄVS.] **(6poäng)**

Fråga 9: [Del 2] Låt $K(t)$ vara den rotationskropp som fås då arean under $y = 2\sqrt{x}$, $0 < x < t$ roteras ett varv kring $x-$axeln. Låt $V(t)$ och $Y(t)$ vara volymen respektive ytan av kroppen $K(t)$. Beräkna ytan av kroppen $K(t)$. Bestäm sedan det $t > 0$ så att $V'(t) = Y'(t)$.

[FULLSTÄNDIG MOTIVERING KRÄVS.] **(6poäng)**

Fråga 10: [Del 2] Kom ihåg att vi, för varje mängd av reella tal A som är begränsad ovanifrån, definierade *den mista övre begränsningen till* A som det minsta tal M så att $M \geq a$ för alla $a \in A$. Bevisa följande sats

"Låt $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq ....$ vara en begränsad sekvens med reella tal. Vidare så låter vi M vara den minsta övre begränsningen till mängden $A = \{a_1, a_2, a_3, ...\}$. Då kommer $\lim_{n\to\infty} a_n = M$."

[ETT FULLSTÄNDIGT BEVIS UTIFRÅN $\epsilon - \delta$ DEFINITIONEN KRÄVS.] **(6poäng)**

Fråga 11: [Del 2]

1. Vad är analysens huvudsats?

[SKRIV NER HUVUDSATSEN MED ALLA ANTAGANDEN.] **(1poäng)**

2. Bevisa analysens huvudsats. Du får använda integralkalkylens medelvärdessats utan bevis.

[FULLSTÄNDIG MOTIVERING KRÄVS.] **(5poäng)**

Fråga 12: [Del 2] Under en lågflygning över Sibiriens tundra så löper James Bonds helikopter plötsligt amok. Rotorbladen lyder inte längre hans komandon och helikoptern börjar stiga med hastigheten $1m/s$. Helikopterns hastighet parallellt med markplanet är konstant $100m/s$. Herr Bonds enda räddning är att hoppa från helikoptern ner i en tunna med vatten som står $1000m$ bort i helikopterns färdriktning.

Det hela inträffar när helikoptern, med James Bond, befinner sig $y = 10e^{-2}$ meter över markplanet. Efter att James Bond hoppar från helikoptern så kommer hans position i höjdled att avgöras av följande differentialekvation

$$y''(t) = -10 - y'(t)$$

och hans position i helikopterns ursprungliga färdriktning parallellt med markplanet bestäms, efter det att han hoppat ur helikoptern, av följande differentialekvation

$$x''(t) = -x'(t).$$

Vid vilken tidpunkt t_0 skall James Bond hoppa ur helikoptern för att landa rätt i vattentunnan som står i markplan (dvs $y = 0$ och $x = 1000$).

[FULLSTÄNDIG MOTIVERING KRÄVS.] **(6poäng)**

Lycka Till!