Lösningsförslag Tentamen SF1602 7e April 2015

Hjälpmedel: Papper, penna.
Totalt 6 poäng per uppgift. För godkänt på modulen krävs 4 poäng.
För E krävs 4 godkända moduler. För ett D krävs 5 godkända moduler. Med 5 godkända moduler ges rätten att skriva tentamen del 2 vilken ger möjlighet till C,B och A. Endast modulresultat som klarades under terminen HT2014 gäller (d.v.s. KS och inlämningar men inte tentamen). Modulresultat från tidigare kursomgångar gäller ej.

Om plussning: Om du redan är godkänd på kursen med ett D eller bättre så behöver du inte skriva del 1. Om du inte är godkänd på kursen eller har ett E på kursen så måste du skriva del 1. Du behåller dock de moduler som du klarade genom KSar eller inlämningsuppgifter under kursomgången HT2014. Moduler som klarats vid tidigare kursomgångar eller tentamen räknas inte.

Tentamen DEL 1.

Fråga 1: [Del 1, Modul 1]

1. Låt $f(x)$ vara en funktion, med definitionsmängd $[1,2]$, så att grafen av $f(x)$ är en rät linje på definitionsmängden. Antag vidare att värdemängden av $f(x)$ är $[3,5]$. Ange funktionen $f(x)$.

   [Ange "formeln" för funktionen $f(x)$. Ingen motivering krävs.] **(1 poäng)**

2. Vad är $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)\cos(x)+\tan(x)}{x}$?

   [Ange gränsvärdet, ∞, $-\infty$ eller "odefinierat". Ingen motivering krävs.] **(1 poäng)**

3. Hitta alla x för så att

$$\tan^2(\arcsin(e^x)) = -1 + \frac{1}{\cos^2(\arcsin(e^x))} + \left|2e^{2x} - e^x - \frac{1}{4}e^{2\ln(\sqrt{2})}\right|,$$

   arcsin antas ha värdemängden $[-\pi/2, \pi/2]$.

   [Fullständig motivering krävs.] **(4 poäng)**

Svar Fråga 1:

1. $f(x) = 2x + 1$.
2. 2
3. Vi observerar att ekvationen är odefinierad då $\cos^2(\arcsin(e^x)) = 0$, dvs då $\arcsin(e^x) = \frac{\pi}{2}$ eller $e^x = 1$ eller då $x = 0$. För $x \neq 0$ så multiplicerar vi ekvationen med $\cos^2(\arcsin(e^x))$. Detta ger:

$$\sin^2(\arcsin(e^x)) = -\cos^2(\arcsin(e^x)) + 1 + \cos^2(\arcsin(e^x))\left|2e^{2x} - e^x - \frac{1}{4}e^{2\ln(\sqrt{2})}\right|.$$

   Genom att använda den trigonometiska ettan så ser vi att detta är ekvivalent med

$$\cos^2(\arcsin(e^x))\left|2e^{2x} - e^x - \frac{1}{4}e^{2\ln(\sqrt{2})}\right| = 0. \tag{1}$$

   Eftersom ekvationen är odefinierad då $\cos^2(\arcsin(e^x)) = 0$, så kan vi anta att $\cos^2(\arcsin(e^x)) \neq 0$ och dela med $\cos^2(\ldots)$. Därför gäller (1) då

$$0 = 2e^{2x} - e^x - \frac{1}{4}e^{2\ln(\sqrt{2})} = 2e^{2x} - e^x - \frac{1}{2}, \tag{2}$$

   där vi använde att $|a| = 0$ endast om $a = 0$ och log-lagar. Om vi betraktar $y = e^x$ så reduceras (2) till

$$y^2 - \frac{1}{2}y - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \begin{cases} \frac{1+2\sqrt{2}}{4} \text{ eller} \\ \frac{1-2\sqrt{2}}{4}. \end{cases}$$

   Eftersom $y = e^x > 0$ så drar vi slutsatsen att $y = \frac{1+2\sqrt{2}}{4}$ vilket ger: **Svar:** $x = \ln\left(\frac{1+2\sqrt{2}}{4}\right)$.

Fråga 2: [Del 1, Modul 2]

1. Det är allmänt känt att tangentlinjen i punkten där $x = a$ till grafen av $f(x)$ ges av $f'(a)(x-a) + f(a)$. Förklara detta med en graf och två förklarande meningar.

   [Detta är en kortfråga så svara kort och visa att du förstår varför tangentlinjens formel ser ut som den gör.]**(1poäng)**

2. Existerar det någon funktion $f(x)$ definierad på $\mathbb{R}$ så att $f'(x) \leq 0$ för $x \leq 0$ och $f'(x) \geq 0$ för $x \geq 0$ men $f(x)$ inte antar ett strängt minima i punkten $x = 0$. Om så är fallet så ange ett exempel på en sådan funktion.

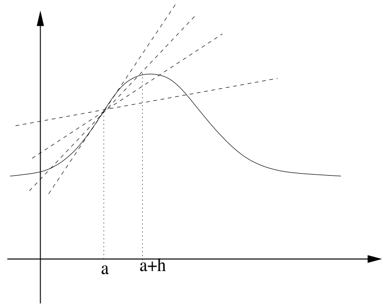
   [Svara "existerar inte" eller med ett exempel på en sådan funktion. Ingen motivering krävs.] **(1poäng)**

3. Beräkna de värden av a och b så att $f(x) = \begin{cases} a\sin\left(e^{x^2+1}\right) & x \geq 1 \\ 3\arctan(x) + b & x < 1 \end{cases}$ är deriverbar i $x = 1$.

   [Fullständig motivering krävs.] **(4 poäng)**

Svar Fråga 2:

1. Nedan så har vi skissat $f(x)$ och approximativa tangentlinjer $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}(x-a) + f(a)$. Man "ser" att den approximativa tangentlinjens ekvation "konvergerar" mot $f'(a)(x-a) + f(a)$ då tangenten går mot den riktiga tangenten



   då $h \to 0$.

2. $f(x) = 0$

3. Vi beräknar derivatan av $a\sin\left(e^{x^2+1}\right)$ och $3\arctan(x) + b$ separat:

$$D\underbrace{\left(a\sin\left(e^{x^2+1}\right)\right)}_{=g(x)} = 2axe^{x^2+1}\cos\left(e^{x^2+1}\right) \text{ och}$$

$$D\underbrace{(3\arctan(x) + b)}_{=h(x)} = \frac{3}{1+x^2},$$

   där vi definierar funktionerna $g(x)$ och $h(x)$ såsom indikeras i ekvationerna. Om vi sätter likhet mellan dessa derivatior i punkten $x = 1$, d.v.s. $g'(1) = h'(1)$, så får vi

$$2ae^2\cos\left(e^2\right) = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{4e^2\cos\left(e^2\right)}. \tag{3}$$

   Vi måste också försäkra oss om att $f(x)$ är kontinuerlig i punkten $x = 1$. Detta eftersom funktioner aldrig är deriverbara i diskontinuiteter. För att göra det så väljer vi b så att $g(1) = h(1)$:

$$a\sin\left(e^2\right) = 3\underbrace{\arctan(1)}_{=\frac{\pi}{4}} + b \Rightarrow b = \frac{3\sin\left(e^2\right)}{4e^2\cos\left(e^2\right)} - \frac{3\pi}{4}.$$

   Med dessa val av a och b så får vi

$$\lim_{\epsilon\to 0^-}\frac{f(1+\epsilon)-f(1)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0^-}\frac{h(1+\epsilon)-h(1)}{\epsilon} = h'(1) = g'(1) = \lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{g(1+\epsilon)-g(1)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{f(1+\epsilon)-f(1)}{\epsilon}. \tag{4}$$

   Där vi använde att $f(1) = g(1) = h(1)$ (genom vårt val av b) och $f(1+\epsilon) = h(1+\epsilon)$ för $\epsilon < 0$ och $f(1+\epsilon) = g(1+\epsilon)$ för $\epsilon > 0$ samt att $h'(1) = g'(1)$ (genom vårt val av a).

   Vi observerar att (4) bevisar att, med våra val av a och b, så är höger och vänsterderivatorna lika i $x = 1$. Det följer att $f(x)$ är deriverbar i $x = 1$.

   Svar Fråga 2: $a = \frac{3}{4e^2\cos(e^2)}$ och $b = \frac{3\sin\left(e^2\right)}{4e^2\cos(e^2)} - \frac{3\pi}{4}$.

Fråga 3: [Del 1, Modul 3]

1. Existerar det någon funktion $f(x) > 0$ på hela $\mathbb{R}$ så att $f(x)$ har en primitiv funktion $F(x) < 0$ på hela $\mathbb{R}$? Om så är fallet ange ett exempel.

   [Svara "existerar inte" eller med ett exempel på en sådan funktion, ingen motivering krävs.] **(1poäng)**

2. Ange formeln för partiell integration.

   [Ingen motivering krävs.] **(1poäng)**

3. Hitta alla primitiva funktioner till $\frac{\cos(x)}{4\sqrt{\sin(x)}(1+\sin(x))}$ som är definierade på $]0, \pi/2[$.

   [Fullständig motivering krävs.] **(4poäng)**

Svar fråga 3:

1. $f(x) = e^{-x} > 0 \Rightarrow F(x) = -e^{-x} < 0$.
2. $\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$
3. Vi söker $\int \frac{\cos(x)}{4\sqrt{\sin(x)}(1+\sin(x))}dx$. Genom att betrakta integralen så ser vi att $y = \sqrt{\sin(x)}$ förefaller vara en bra substitution. Då $\sin(x) > 0$ då $x \in]0, \pi/2[$ så är $y = \sqrt{\sin(x)}$ sambandet injektivt och surjektivs så variabelsubstitutionen är väldefinierad. Vi beräknar

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}$$

och därför så är

$$\int \frac{1}{2(1+\sin(x))}\underbrace{\frac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}}dx}_{=dy} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(1+y^2)}dy = \frac{1}{2}\arctan(y) + C = \frac{1}{2}\arctan(\sqrt{\sin(x)}) + C,$$

vilket är vårt svar.

Fråga 4: [Del 1, Modul 4]

1. För vilka $\alpha \in \mathbb{R}$ är $\int_0^\infty x^\alpha dx$ konvergent?

   [Ange alla α, ingen motivering krävs.] **(1poäng)**

2. Vad är en trappfunktion, $\Psi(x)$, definierad på $[-1, 1]$ och vad är definitionen av integralen $I(\Psi)$ av trappfunktionen $\Psi(x)$.

   [Ange definitionen av en trappfunktion och formeln för $I(\Psi)$, ingen motivering krävs.] **(1poäng)**

3. Beräkna följande integral $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{2\cos(x)+\sin(x)}dx$.

   [Fullständig motivering krävs] **(4poäng)**

Svar fråga 4:

1. Inte för några α.
2. En trappfunktion $\Psi(x)$ är styckvis konstant. Dvs det existerar $-1 = a_0 < a_1 < a_2 < ... < a_k = 1$ och reella tal $c_1, c_2, ...c_k$ så att $\Psi(x) = c_j$ för $x \in]c_{j-1}, c_j[$. Integralen av $\Psi(x)$ definieras då $I(\Psi) = \sum_{j=1}^k c_j(a_j - a_{j-1})$.

3. **Talet är helt standard så, av lättja, går inte igenom alla detaljer här.** Vi gör standardsubstitutionen $x = 2\arctan(y)$ vilken är väldefinierad för $x \in]-\pi/2, \pi/2[$. Vi får därför att $dx = \frac{2}{1+y^2}dy$, $\sin(x) = \frac{2y}{1+y^2}$ och $\cos(x) = \frac{1-y^2}{1+y^2}$ samt att $x = 0 \Rightarrow y = 0$ och $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = 1$. Därför så är

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{2\cos(x)+\sin(x)}dx = \int_0^1 \frac{2y}{(1+y^2)(2-2y^2+2y)}dy = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2y}{(1+y^2)(y^2-y-1)}dy.$$

Eftersom $(y^2-y-1) = \left(y - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(y - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$, vilket inses genom en enkel tillämpning av pq-formeln, så kan vi göra partialbråksansatsen

$$\frac{2y}{(1+y^2)(y^2-y-1)} = \frac{ay+b}{1+y^2} + \frac{c}{y-\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + \frac{d}{y-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}.$$

Förlänger vi höger och vänsterled med $(1+y^2)(y^2-y-1)$ och jämför koefficienter så får vi

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1-\sqrt{5}}{2} & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -\frac{1-\sqrt{5}}{2} & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Om vi löser detta linjära ekvationssystem så får vi $a = b = -\frac{2}{3}$, $c = \frac{1+\sqrt{5}}{3\sqrt{5}}$ och $d = -\frac{1-\sqrt{5}}{3\sqrt{5}}$.

Vi får alltså att

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{2\cos(x)+\sin(x)}dx = -\frac{1}{6}\int_0^1 \left(-\frac{2y+2}{1+y^2} + \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\frac{1}{y-\frac{1+\sqrt{5}}{2}} - \frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\frac{1}{y-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\right)dy =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\ln(1+y^2) + 2\arctan(y) - \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\ln\left|y-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right| + \frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\ln\left|y-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right|\right)\Bigg|_{y=0}^{y=1} =$$

$$= \frac{\ln(2)}{6} + \frac{\pi}{12} + \frac{1}{3\sqrt{5}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}\right|.$$

Fråga 5: [Del 1, Modul 5]

1. Låt $y(x)$ vara en lösning, definierad på $[0,1[$, till följande differentialekvation

$$\begin{aligned}\tfrac{dy(x)}{dx} &= f(x)\\ y(0) &= a.\end{aligned}$$

Ange en kontinuerlig funktion $f(x)$ definierad på $[0,1[$ så att $\lim_{x\to 1^-} y(x) = -\infty$ oavsett vad $a \in \mathbb{R}$ är.

[Ange en funktion $f(x)$ eller "omöjligt". Ingen motivering krävs] **(1poäng)**

2. Ange tal $a, b, c \in \mathbb{R}$ så att alla lösningar $y(x)$, definierade på hela $\mathbb{R}$, till följande differentialekvation: $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = -1$ är strikt växande.

[Ange $a, b, c \in \mathbb{R}$ eller "omöjligt". Ingen motivering krävs] **(1poäng)**

3. Lös följande differentialekvation

$$\begin{aligned} y''(x) + 4y(x) &= x\sin(x)\\ y(0) = \tfrac{2}{9} \text{ och } y'(\pi) &= \tfrac{2\pi}{3}.\end{aligned}$$

[Fullständig motivering krävs.] **(4poäng)**

Svar fråga 5:

1. $f(x) = -\frac{1}{x}$
2. $a = c = 0$ och $b = -1$

3. Vi måste hitta homogen och partikulärlösning för att hitta den homogena läsningen så betraktar vi det karakteristiska polynomet $r^2 + 4 = 0$ vilket direkt ger oss att $y_h(x) = a\cos(2x) + b\sin(2x)$ är den homogena lösningen.

   För att hitta partikulärlösnngen så gör vi ansättningen

$$y_p(x) = (\alpha x + \beta)\sin(x) + (\gamma x + \delta)\cos(x).$$

   En enkel beräkning ger

$$y_p''(x) = 2\alpha\cos(x) - (\alpha x + \beta)\sin(x) - 2\gamma\sin(x) - (\gamma x + \delta)\cos(x).$$

   För att beräkna α, β, δ och γ så använder vi ekvationen $y''(x) + 4y(x) = x\sin(x)$ och får

$$3\alpha x\sin(x) + 3\gamma x\cos(x) + (3\beta - 2\gamma)\sin(x) + (3\delta + 2\alpha)\cos(x) = x\sin(x).$$

   Identifierar vi termer i höger och vänsterled så ser vi att

$$3\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3} \tag{5}$$

$$3\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 0 \tag{6}$$

$$3\beta - 2\gamma = 0 \Rightarrow 3\beta = 0 \text{ då } \gamma = 0 \Rightarrow \beta = 0 \tag{7}$$

$$3\delta + 2\alpha = 0 \Rightarrow 3\delta + \frac{2}{3} = 0 \text{ då } \alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \delta = -\frac{1}{9}. \tag{8}$$

   Vi får därför partikulärlösningen

$$y_p(x) = \frac{x}{3}\sin(x) - \frac{1}{9}\cos(x).$$

   En allmän lösning till differentialekvationen är, för några $a, b \in \mathbb{R}$,

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = a\cos(2x) + b\sin(2x) + \frac{x}{3}\sin(x) - \frac{1}{9}\cos(x).$$

   För att hitta a och b så använder vi randdata:

$$\frac{2}{9} = y(0) = a - \frac{1}{9} \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

   och

$$\frac{2\pi}{3} = y'(\pi) = 2b + \frac{\pi}{3} \Rightarrow b = \frac{\pi}{6}.$$

   Lösningen till differentialekvationen blir därför

$$y(x) = \frac{1}{3}\cos(2x) + \frac{\pi}{6}\sin(2x) + \frac{x}{3}\sin(x) - \frac{1}{9}\cos(x).$$

Fråga 6: [Del 1, Modul 6]

1. Ange en funktion $f(x)$ så att andra ordningens Taylorpolynom i punkten 2 är $3x^2 + 7x - 6$.

   [Ange Taylorpolynomet eller "omöjligt att avgöra", ingen motivering krävs.] **(1poäng)**

2. Givet att $f(x)$ är tre gånger kontinuerligt deriverbar och att $f(x)$ har följande Taylorapproximation kring punkten $x = 2$: $f(x) = 1 + 3(x-2) - \frac{7}{2}(x-2)^2 + R_3(x)$, där $R_3(x)$ är resttermen. Vad är första ordningens Taylorpolynom till $R_3(x)$ i punkten $x = 2$?

   [Ange Taylorpolynomet eller "omöjligt att avgöra", ingen motivering krävs.] **(1poäng)**

3. Uppskatta $f(1/10)$, då $f(x) = \ln(\arctan(x) + \cos(x))$, genom att approximera $f(x)$ med ett andra ordningens Maclaurinpolynom. Om $|f'''(x)| \leq 3$ för $x \in [0, 1/10]$ vad är det maximala felet i din uppskattning?

   [Motivera ditt svar.] **(4 poäng)**

Svar fråga 6:

1. $f(x) = 3x^2 + 7x - 6$
2. Taylorpolynomet är 0.

3. För att beräkna andra ordningens Maclaurinpolynom så behöver vi beräkna de första två derivatorna av $F(x)$:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{1+x^2} - \sin(x)}{\arctan(x) + \cos(x)} \Rightarrow f'(0) = 1,$$

$$f''(x) = \frac{\frac{-2x}{(1+x^2)^2} - \cos(x)}{\arctan(x) + \cos(x)} - \frac{\left(\frac{1}{1+x^2} - \sin(x)\right)^2}{(\arctan(x) + \cos(x))^2} \Rightarrow f''(0) = -2.$$

Enligt definition så ges andra ordningens Maclaurinpolynom av formeln

$$p_2(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 \Rightarrow p_2(x) = x - x^2,$$

där vi också använde att $f(0) = 0$ i implikationen. Vår uppskattning av $f(1/10)$ är därför $f(1/10) \approx \frac{1}{10} - \frac{1}{100} = \frac{9}{100}$.
För att uppskatta felet så använder vi Maclaurins formel med resttermen

$$f(x) = x - x^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}x^3$$

där $\xi \in [0, x]$. I vårt fall så får vi

$$\left| f(1/10) - \frac{9}{100} \right| = \left| \frac{f'''(\xi)}{3!} \frac{1}{1000} \right| \le \frac{1}{2000}$$

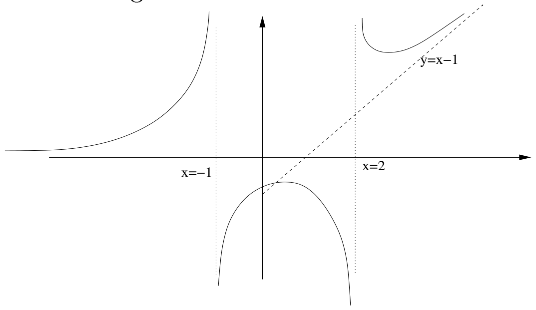
där vi använde att $|f'''(\xi)| \le 3$ enligt uppgiftsformuleringen.
Vårt svar blir därför $f(1/10) = \frac{9}{100}$ med maximalt fel på $\frac{1}{2000}$.

Tentamen DEL 2.

Varje fråga tilldelas 6 poäng. Totalt 36 poäng. För C krävs 12 poäng, för B krävs 20 poäng och för ett A krävs 28 poäng.

Fråga X: Ange om du har D eller bättre från en tidigare kursomgång och om du är här för att plussa.

Fråga 7: [Del 2] Ett fysikaliskt experiment ger ett samband mellan x och y som, i stora drag, gestaltas i grafen nedan. Speciellt så har grafen vertikala asymptoter i $x = -1$ och $x = 2$, vidare så har grafen asymptoterna $y = x - 1$ då $x \to \infty$ och $y = 0$ då $x \to -\infty$. Hitta en funktion som är definierad på $\mathbb{R}$, utom i punkterna $x = -1$ och $x = 2$, som har beteende som grafen nedan.



[Motivera ditt svar.] **(6 poäng)**

Svar fråga 7: Vi börjar med att hitta en funktion som har de angivna vertikala asymptoterna. Vi behöver därför hitta en kontinuerlig funktion $f(x)$ så att

$$f(x) = \begin{cases} > 0 & \text{om } x < -1 \\ = 0 & \text{om } x = -1 \\ < 0 & \text{om } -1 < x < 2 \\ = 0 & \text{om } x = 2 \\ > 0 & \text{on } 2 < x. \end{cases}$$

Då kommer $\frac{1}{f(x)}$ att ha rätt lodräta asymptoter.

Det enklaste valet är att ansätta $f(x) = (x+1)(x-2)$. Då har $\frac{1}{f(x)}$ rätt lodräta asymptoter och

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)} = \left\{ \begin{array}{c} \text{produkt} \\ \text{regeln} \end{array} \right\} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{kvot och summa} \\ \text{regeln} \end{array} \right\} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2} \frac{1}{\lim_{x\to\pm\infty} 1 - \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} - \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{x^2}} = 0,$$

där vi använde standardgränsvärdena $\frac{1}{x} \to 0$ och $\frac{1}{x^2} \to 0$ då $x \to \pm\infty$.

Således så har $\frac{1}{f(x)}$ de asymptoterna $y = 0$ då $x \to \pm\infty$. Funktionen $1/f(x)$ skiljer sig från den sökta funktionen endast i avseende på asymptoten då $x \to \infty$. Vi fixar detta lätt och definierar

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x+1)(x-2)} & \text{för } x < -1 \\ \frac{1}{(x+1)(x-2)} & \text{för } -1 < x < 2 \\ \frac{1}{(x+1)(x-2)} + x - 1 & \text{för } 2 < x. \end{cases}$$

Fråga 8: [Del 2] Låt $F(x) = \int_0^{\arctan(x)} \left(\frac{t}{\cos(t)} - \sin(t) \right) dt$ för $x \in [0, \infty[$. Är $F(x)$ monoton på $[0, \infty[$? Om $F(x)$ är monoton avgör om F är växande eller avtagande.

[Fullständig motivering krävs.] **(6 poäng)**

Svar fråga 8: Det lättaset sättet att avgöra om integralen är monoton är att derivera den och se om derivatan har ett tecken. Om vi skriver $G(s) = \int_0^s \left(\frac{t}{\cos(t)} - \sin(t) \right) dt$ så kommer $G'(s) = \frac{s}{\cos(s)} - \sin(s)$ enligt analysens huvudsats. Vidare så är $F(x) = G(\arctan(x))$ så enligt kedjeregeln så är

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{d \arctan(x)}{dx} G'(\arctan(x)) = \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{>0} \left(\frac{\arctan(x)}{\cos(\arctan(x))} - \sin(\arctan(x)) \right).$$

Vi ser direkt att $\frac{dF(x)}{dx}$ har samma tecken som $\frac{\arctan(x)}{\cos(\arctan(x))} - \sin(\arctan(x)$. Då $x \in [0, \infty[$ så kommer $y = \arctan(x) \in [0, \pi/2[$ så vi ser att $F(x)$ är monoton om och endast om $\frac{y}{\cos(y)} - \sin(y)$ har ett tecken för $y \in [0, \pi/2[$, visare så har då $F(x)$ samma tecken som $\frac{y}{\cos(y)} - \sin(y)$. Vi beräknar

$$\frac{y}{\cos(y)} - \sin(y) = \frac{y - \cos(y)\sin(y)}{\cos(y)} \geq \left\{ \begin{array}{l} \text{eftersom } 0 < \cos(y) \leq 1 \\ \text{då } y \in [0, \pi/2[\end{array} \right\} \geq \frac{y - \sin(y)}{\cos(y)} \geq 0,$$

där vi använde att $y \geq \sin(y)$ för $y > 0$. Det sista påståendet är en standardolikhet. Det kan lätt inses genom att använda medelvärdessatsen: $0 - \sin(0) = 0$ och att $\frac{d(y-\sin(y))}{dy} = 1 - \cos(y) \geq 0$ därför, enligt medelvärdessatsen, $y - \sin(y) = (y - \sin(y)) - (0 - \sin(0)) = (1 - \cos(\xi_y))(y - 0) \geq 0$ för $y \geq 0$ och något värde $\xi_y \in [0, y]$.

Fråga 9: [Del 2] Låt (x_0, y_0) vara en punkt på kurvan som ges av ekvationen $\sinh(y) - \frac{1}{1+x^2} = 0$. Ange en formel för arean av triangeln som har hörnpunkter (x_0, y_0), den punkten där tangentlinjen till $\sinh(y) - \frac{1}{1+x^2} = 0$ skär $x-$axeln samt den punkt där normalen skär $x-$axeln.

[Fullständig motivering krävs.] **(6 poäng)**

Svar fråga 9: Vi använder implicit derivering. Vi tänker oss därför y som en funktion av x och deriverar $\sinh(y) - \frac{1}{1+x^2} = 0$ med avseende på x, och använder $\sinh(y) = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$, vilket ger

$$y'(x) \frac{e^{y(x)} + e^{-y(x)}}{2} + \frac{2x}{(1+x^2)^2} = 0 \Rightarrow y'(x) = \frac{-2x}{\cosh(y)(1+x^2)^2},$$

där vi också använde att $\cosh(x) = \frac{e^{y(x)} + e^{-y(x)}}{2}$ (eller $\frac{d \sinh(y)}{dy} = \cosh(y)$).

Tangentlinjen till kurvan i punkten (x_0, y_0) ges därför av

$$T(x) = \frac{-2x_0}{\cosh(y_0)(1+x_0^2)^2}(x - x_0) + y_0.$$

En elementär beräkning ger att tangentlinjen skär x-axeln, dvs $T(x) = 0$, i punkten x_t då

$$x_t = x_0 + \frac{y_0 \cosh(y_0)(1+x_0^2)^2}{2x_0},$$

förutsatt att $x_0 \neq 0$.

Normalen, $N(x)$, till kurvan är vinkelrät mot tangenten och ges därför av ekvationen, då $x_0 \neq 0$,

$$N(x) = \frac{\cosh(y_0)(1+x_0^2)^2}{2x_0}(x - x_0) + y_0$$

och skär $x-$axeln i

$$x_n = x_0 - \frac{2x_0 y_0}{\cosh(y_0)(1+x_0^2)^2}.$$

Basen på triangeln har därför längden

$$|x_t - x_n| = \left| \frac{y_0 \cosh(y_0)(1+x_0^2)^2}{2x_0} + \frac{2x_0 y_0}{\cosh(y_0)(1+x_0^2)^2} \right|.$$

Höjden är $|y_0|$ vilket ger att arean, då $x_0 \neq 0$, är

$$\text{Area} = \frac{|y_0|}{2} \left| \frac{y_0 \cosh(y_0)(1+x_0^2)^2}{2x_0} + \frac{2x_0 y_0}{\cosh(y_0)(1+x_0^2)^2} \right|, \tag{9}$$

enligt standardformeln basen gånger höjden delat med två.

Svar fråga 9: Arean anges enligt (9) om $x_0 \neq 0$. Om $x_0 = 0$ så är triangeln odefinierad då tangenten inte skär $x-$axeln.

Fråga 10: [Del 2] I den här uppgiften så betraktar vi vektorfältet $(\sin^2(x), (1+y^2)^{-1})$ i $\mathbb{R}^2$.

1. Skissa vektorfältet i ett koordinatsystem.

   [En tydlig skiss krävs, men du behöver inte förklara hur du skissade.] **(1 poäng)**

2. Skissa en funktion $y(x)$ i samma koordinatsystem så att grafen av $y(x)$ är vinkelrät mot vektorfältet i varje punkt. Hitta ett uttryck för derivatan $y'(x)$ i punkten (x, y).

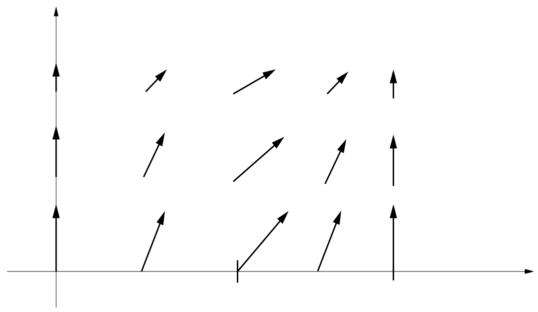
   [Ett tydligt resonemang krävs.] **(2 poäng)**

3. Beräkna $y(x)$, där grafen av $y(x)$ är vinkelrät mot vektorfältet i varje punkt och $y(0) = 3$.

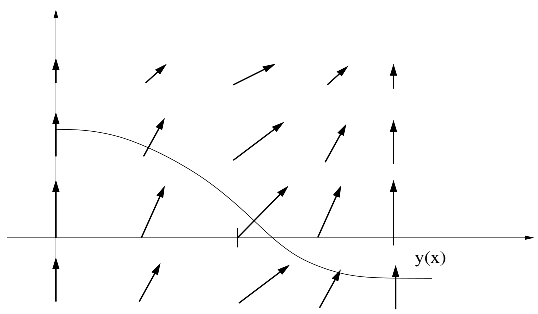
   [Motivera ditt svar.] **(3 poäng)**

Svar fråga 10:

1. Nedan så hittar du en skiss av vektorfältet.



2. I nedanstående graf så har även en funktion $y(x)$ som är vinkelrät mot vektorfältet ritats in.



Eftersom grafen av $y(x)$ är vinkelrät mot vektorfältet endast om tnagenten är vinkelrär mot vektorfältet i varje punkt så måste vi beräkna riktningen på tangenten: $(1, y'(x))$. Om denna är vinkelrät mot vektorfältet så måste

$$0 = (1, y'(x)) \cdot \left(\sin^2(x), \frac{1}{1+y^2} \right) = \sin^2(x) + \frac{y'(x)}{1+y^2} \Rightarrow y'(x) = -(1+y^2)\sin^2(x).$$

3. Vi ser, från föregående deluppgift, att $y(x)$ är vinkelrät mot vektorfältet om $y(x)$ uppfyller följande differentialekvation

$$y'(x) = -(1+y^2)\sin^2(x).$$

Differential ekvationen är separabel så vi kan skriva den

$$\frac{d\arctan(y)}{dx} = \frac{y'(x)}{1+y^2} = -\sin^2(x). \tag{10}$$

Integrerar vi båda sidor i (10) så får vi

$$\arctan(y) = \int \sin^2(x)dx = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + C,$$

där vi använde standardomskrivningen $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ i den andra likheten.

Vi får således att

$$y(x) = \tan\left(\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + C\right)$$

för någon konstant C. Vi bestämmer C genom att använda bivilkåret $y(0) = 3$ vilket ger

$$3 = \tan(0+0+C) \Rightarrow C = \arctan(3).$$

Den sökta funktionen blir därför

$$y(x) = \tan\left(\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + \arctan(3)\right).$$

Fråga 11: [Del 2] Låt $g(x)$ och $h(x)$ vara kontinuerligt deriverbara funktioner på $[-1,1]$ så att $h(x) \leq g(x)$ för alla $x \in [-1,1]$ och $g(0) = h(0)$. Antag vidare att $f(x)$ är en funktion, inte nödvändigtvis kontinuerlig, definierad på $[-1,1]$ så att $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ för alla $x \in [-1,1]$. Kan man uttrycka $f'(0)$ i termer av $g'(0)$ och $h'(0)$? Bevisa ditt svar!

[Ett fullständigt bevis krävs.] **(6 poäng)**

Svar fråga 11: Vi kommer att bevisa detta i två steg. Först så visar vi att om vi kan bevisa satsen i specialfallet $h(x) = 0$ så följer det allmänna fallet enkelt. Därefter så bevisar vi att satsen är sann i specialfallet. Man kan naturligtvis skriva ner ett direkt bevis.

Steg 1: *Om $h(x) = 0$ så kommer $f'(0) = g'(0) = h'(0)$.*

Om $h(x) = 0$ så kommer $g(x) \geq h(x) = 0$ och $g(0) = h(0) = 0$ (enligt antagande). Därför så är $x = 0$ en inre minimipunkt för den deriverbara funktionen $g(x)$. Vi kan dra slutsatsen att $g'(0) = 0$. Eftersom $h(0) = f(0) = g(0) = 0$ och $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ så är

$$h(x) - h(0) \leq f(x) - f(0) \leq g(x) - g(0). \tag{11}$$

Om vi sätter $x = \epsilon > 0$ och delar (11) med ϵ så får vi

$$\frac{h(\epsilon)-h(0)}{\epsilon} \leq \frac{f(\epsilon)-f(0)}{\epsilon} \leq \frac{g(\epsilon)-g(0)}{\epsilon}.$$

Om vi tar gränsvärdet $\epsilon \to 0^+$ i ovanstående och använder $h'(0) = g'(0) = 0$ så får vi enligt sats om olikhet i gränsövergång

$$0 \leq \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{f(\epsilon)-f(0)}{\epsilon} \leq 0 \Rightarrow D_+f(0) = 0.$$

Om vi på samma sätt väljer $x = \epsilon < 0$ och delar (11) med ϵ så får vi

$$\frac{h(\epsilon)-h(0)}{\epsilon} \geq \frac{f(\epsilon)-f(0)}{\epsilon} \geq \frac{g(\epsilon)-g(0)}{\epsilon},$$

vilket igen enligt satsen om olikhet i övergång av gränsvärde ger

$$0 \geq \lim_{\epsilon \to 0^-} \frac{f(\epsilon)-f(0)}{\epsilon} \leq 0 \Rightarrow D_-f(0) = 0.$$

Vi ser att både höger och vänsterderivatan är noll så $f'(0) = 0$ vilket skulle visas.

Steg 2: *$f'(x) = g'(x) = h'(x)$ under förutsättningarna i uppgiftsformuleringen.*

Vi definierar $f\tilde{(x)} = f(x) - h(x)$, $\tilde{g}(x) = g(x) - h(x)$ och $\tilde{h}(x) = h(x) - h(x) = 0$. Då uppfyller $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ och $\tilde{h}$ villkåren i steg 1. Vi kan därför dra slutsatsen att $\tilde{f}'(0) = \tilde{g}'(0) = \tilde{h}'(0) = 0$. Men $f(x) = \tilde{f}(x) + h(x)$ så enligt summa regeln för derivator så är $f'(0) = \tilde{f}'(0) + h'(0) = 0 + h'(0) = h'(0)$ och på samma sätt så är $g'(0) = \tilde{g}'(0) + h'(0) = h'(0)$. Vi har därför bevisat att:

Svar fråga 11: Under förutsättningarna i uppgiften så är $f'(0) = g'(0) = h'(0)$.

Fråga 12: [Del 2] Låt $f(x)$ vara en styckvis kontinuerlig funktion på $[0,1]$ och definiera $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Antag vidare att $\lim_{t\to x^+} f(t)$ och $\lim_{t\to x^-} f(t)$ existerar för varje $x \in]0,1[$.

Vi definierar höger och vänster derivatan av en funktion $g(x)$ enligt $D^{\pm}g(x) = \lim_{h\to 0^{\pm}} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$. Bevisa att $D^+F(x) = \lim_{t\to x^+} f(t)$ och $D^-F(x) = \lim_{t\to x^-} f(t)$.

[Ett fullständigt bevis krävs.] **(6 poäng)**

Svar fråga 12: Vi vet att för Riemann integralen så gäller det att $\underbrace{\int_0^{x+h} f(t)dt}_{=F(x+h)} = \underbrace{\int_0^{x} f(t)dt}_{=F(x)} + \int_x^{x+h} f(t)dt$. Detta implicerar att

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt.$$

Vi antar för tillfället att $h > 0$ och observerar att $f(t)$ är kontinuerlig på $]x, x+h[$ om $h > 0$ är tillräckligt litet. Detta eftersom $f(t)$ är styckvis kontinuerlig vilket innebär att $f(t)$ endast har ändligt många diskontinuitetspunkter så det finns ett minsta värde $h_0 > 0$ så att $f(t)$ har en diskontinuitet i $x + h_0$. Om $0 < h \leq h_0$ så kommer $f(t)$ att vara kontinuerlig på $]x, x+h[$. Eftersom gränsvärdet $\lim_{t\to x^+} f(t)$ existerar så kommer funktionen

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t) & \text{om } t \in]x, x+h] \\ \lim_{t\to x^+} f(t) & t = x \end{cases}$$

att vara kontinuerlig på $[x, x+h]$ och $\frac{1}{h}\int_x^{x+h} \tilde{f}(t)dt = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$ eftersom $f(t)$ och $\tilde{f}(t)$ är lika utom möjligtvis i en punkt.

Enligt integralkalkylens medelvärdessats så kommer det därför att existera ett $\xi_h \in [x, x+h]$ så att

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} \tilde{f}(t)dt = \tilde{f}(\xi_h).$$

Detta medför att

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \tilde{f}(t)dt = \lim_{h\to 0^+} \tilde{f}(\xi_h). \tag{12}$$

Men eftersom $x \leq \xi_h \leq x+h$ så kommer, enligt satsen om övergång av gränsvärde i olikhet, $\lim_{h\to 0^+} \xi_h = x$ och vi kan därför härleda att

$$\lim_{h\to 0^+} \tilde{f}(\xi_h) = \lim_{t\to x^+} \tilde{f}(r) = \lim_{t\to x^+} f(x) \tag{13}$$

där den sista likheten följer av att $\tilde{f}(t) = f(t)$ då $t \in]x, x+h_0]$. Från (13) och (12) så följer det att

$$D^+F(x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{t\to x^+} f(x).$$

Påståendet att $D^-F(x) = \lim_{t\to x^-} f(x)$ bevisas på samma sätt.