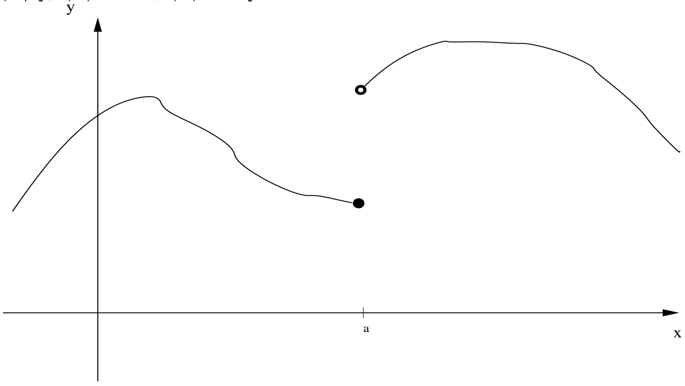
Teoriövning 1.

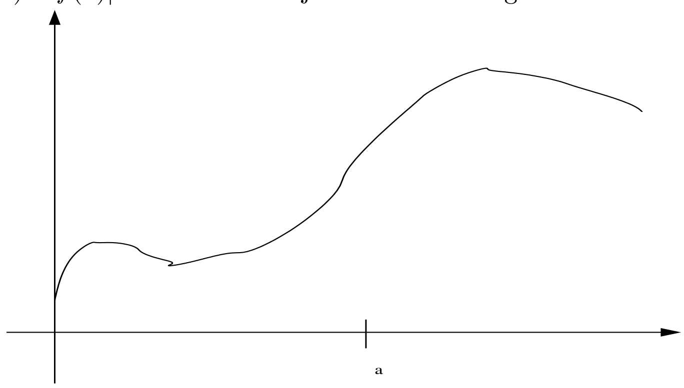
Del 1: Gränsvärden.

Fråga 1. Nedan så hittar ni grafen av en funktion $f(x)$ som är diskontinuerlig i punkten $x = a$. Markera ett intervall $]f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon[$ på $y-$axeln så att det för varje $\delta > 0$ finns (minst) ett x så att $x \in]a - \delta, a + \delta[$ så att $f(x) \notin]f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon[$.



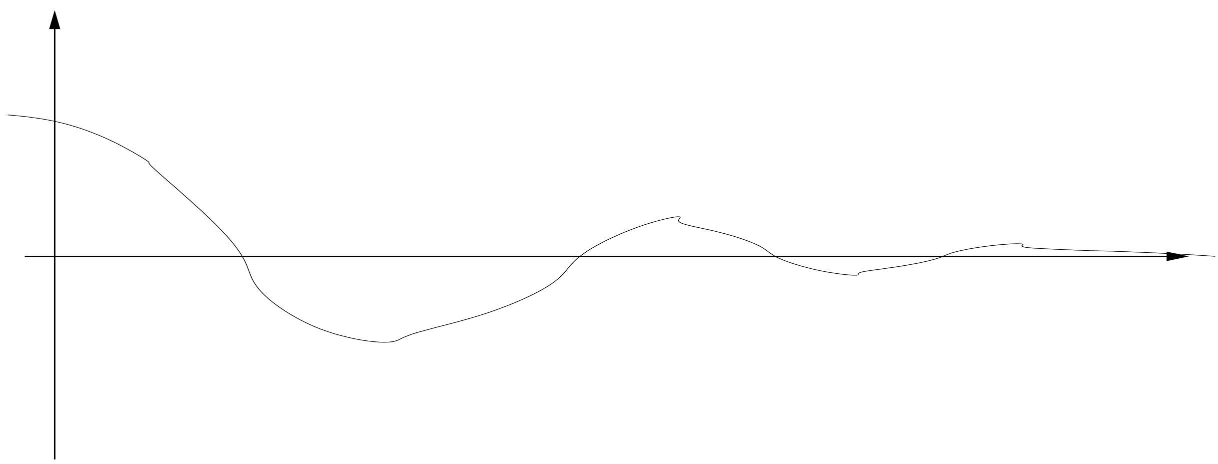
Rita in intervallet $]a - \delta, a + \delta[$, punkten x och $f(x)$ i grafen och grafiskt motivera ert val av $\epsilon > 0$.

Fråga 2. Nedan så hittar ni grafen av en kontinuerlig funktion $f(x)$. Rita in ett intervall $]f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon[$ på $y-$axeln och rita in $y = f(a) \pm \epsilon$ i grafen. Visa i grafen att det finns ett $\delta > 0$ så att för alla $x \in]a - \delta, a + \delta[$ så gäller $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. Rita ut linjerna $x = a \pm \delta$ i grafen.



Fråga 3.

1. Nedan så hittar ni en graf av en funktion som går till noll då $x \to \infty$. Välj ett $\epsilon > 0$ och rita in intervallet $] - \epsilon, \epsilon[$ på $y-$axeln och rita ut linjerna $y = \pm\epsilon$.



2. Hitta, genom att titta i grafen, ett tal $C_\epsilon > 0$ så att $|f(x)| < \epsilon$ för alla $x > C_\epsilon$. Övertyga dig om att det, för varje $\epsilon > 0$, finns ett sådant tal C_ϵ (kanske måste man utvidga grafen lite till höger om ϵ är litet).

3. Rita grafen av en funktion $f(x)$ som inte går mot noll då $x \to \infty$, tex $f(x) = \cos(x)$, och visa genom att rita in $y = \pm\epsilon$ i grafen för ett tillräckligt litet $\epsilon > 0$ att det inte finns något $C_\epsilon > 0$ så att $|f(x)| < \epsilon$ för alla $x > C_\epsilon$.

Fråga 4.

1. Skissa grafen till $f(x) = \frac{\sin(x)}{x^3}$ för $x > 0$. Rita in $y = \pm\epsilon$ i grafen och ett $C_\epsilon > 0$ så att $|f(x)| < \epsilon$ för alla $x > C_\epsilon$.

2. Använd uttrycket för $f(x)$ för att beräkna ett $C_\epsilon > 0$ så att $|f(x)| < \epsilon$ för alla $x > C_\epsilon$.

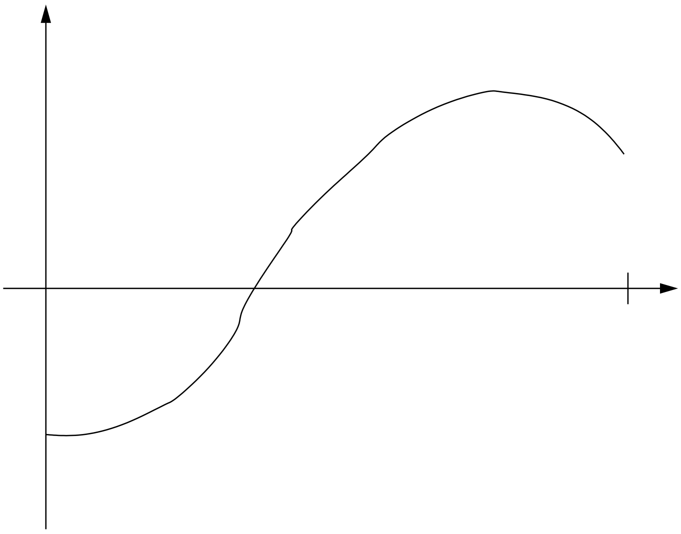
Fråga 5. Ta ett par minuter och diskutera definitionen av $\lim_{x\to a} f(x) = A$. Försök att få en känsla för att definitionen är rimlig och att den uttrycker i formler vad vi intuitivt menat med att $f(x)$ närmar sig värdet A då x närmar sig a.

Del 2: Kompletthet och Kontinuerliga Funktioners Egenskaper.

Fråga 6. Vi ska leka en Bolzano-Weierstrass lek[1]. Välj en av er som väljer en hemlig punkt c på linjen nedan. Ni andra markerar a_1 på mitten av linjen och frågar om c ligger på intervallhalvan till höger eller till vänster om a_1. Markera a_2 på mitten av den halvan som innehåller c. Fortsätt och markera a_3 på mitten av den fjärdedel som innehåller c, a_4 på den åttondel etc...

Fortsätt tills ni är övertygade om att $a_k \to c$ då $k \to \infty$.

Fråga 7. Nedan så hittar ni en graf av en kontinuerlig funktion $f(x)$ på $[0, 1]$ så att $f(0) < 0$ och $f(1) > 0$. Vi ska leka Bolzano-Weierstrass leken med den funktionen. Men istället för att ha en hemlig punkt så letar vi efter ett x_0 så att $f(x_0) = 0$.



Leken går till på följande sätt.

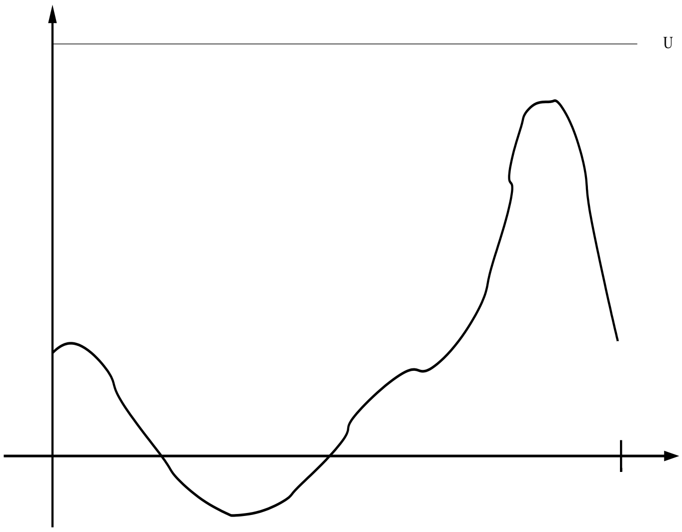
1. Sätt $a_0 = 0$ och $b_0 = 1$. Markera ut mittpunkten, kalla den c_0, på intervallet $[a_0, b_0]$.
2. Om $f(c_0) = 0$ så har vi hittat ett nollställe och vi har vunnit, dvs hittat ett tal x_0 så att $f(x_0) = 0$. Om inte så kommer antingen $f(c_0) > 0$ eller $f(c_0) < 0$.
3. Välj nu det intervallet av $[a_0, c_0]$ eller $[c_0, b_0]$ så att $f < 0$ i vänsterpunkten och $f > 0$ i högerpunkten. Kalla det nya intervallet $[a_1, b_1]$.
4. Markera mittpunkten c_1 på $[a_1, b_1]$. Om $f(c_1) = 0$ så har ni vunnit, annars välj det intervall $[a_1, c_1]$ eller $[c_1, b_1]$ så att $f < 0$ i vänsterpunkten och $f > 0$ i höger punkten och kalla det intervallet $[a_2, b_2]$.
5. Fortsätt och definiera intervall $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ så att $[a_{k+1}, b_{k+1}] \subset [a_k, b_k]$ och $f(a_{k+1}) < 0$ och $f(b_{k+1}) > 0$.
6. Observera att a_k är en växande sekvens och b_k en avtagande sekvens. Konvergerar a_k och b_k? Konvergerar de till samma sak värde, låt oss kalla det x_0?
7. Använd att $f(x)$ är kontinuerlig för att dra slutsatsen att $\lim_{k\to\infty} f(a_k) = \lim_{k\to\infty} f(b_k) = f(x_0)$. Kan vi dra någon slutsats om värdet av $f(x_0)$ från grafen? Kan vi bevisa vår slutsats[2] utifrån faktumet att $f(a_k) < 0$ och $f(b_k) > 0$.

Fråga 8. Nedan så hittar du grafen av en kontinuerlig funktion på $[0, 1]$. Vidare så gäller det att $f(x) \leq U$ för alla $x \in [0, 1]$. Vi ska försöka övertyga oss om att $f(x)$ antar sitt maximum i intervallet $[0, 1]$. Dvs att det finns ett $x_0 \in [0, 1]$ så att $f(x) \leq f(x_0)$ för alla $x \in [0, 1]$. Vi kommer att använda ett Bolzano-Weierstrass argument igen.

---

[1] Det här kan vara världens tråkigaste lek. Speciellt eftersom utgången alltid är den samma. Men i matematik så vill vi att utgången skall vara den samma!

[2] Se tex *"Regeln om gränsövergång i olikhet"*.



1. Markera punkten c_1 mitt mellan $y = 0$ och $y = U$ på $y-$axeln. Dra även linjen $y = c_1$. Antingen så kommer det finnas något $x \in [0, 1]$ så att $f(x) \geq c_1$ och i så fall kommer linjen $y = c_1$ att skära grafen av $f(x)$ (varför?) eller så är $f(x) < c_1$ för alla $x \in [0, 1]$.

2. Om grafen till f skär linjen $y = c_1$, dvs $f(x) = c_1$ för något x, så kalla det minsta x så att $f(x) = c_1$ för a_1 och dela markera mittpunkten av c_1 och U på $y-$axeln med c_2 och kalla intervallet $[c_1, U]$ för I_2. Om $f(x) < c_1$ för alla $x \in [0, 1]$ så sätt $a_1 = 0$ och låt c_2 vara mittpunkten mellan c_1 och 0 och kalla intervallet $[0, c_1]$ för I_2.

3. Fortsätt induktivt och rita in a_2, a_3, a_4 och c_3, c_4, c_5 enligt följande: Om vi har definierat intervallet I_k på $y-$axeln så delar vi det på mitten med punkten c_k. Då kommer antingen linjen $y = c_k$ att skära grafen av $f(x)$ i någon punkt x, vi kallar den punkt längst till vänster så att $f(x) = c_k$ för a_k och kallar den övre halvan av I_k för I_{k+1}. Om det inte finns något x så att $f(x) = c_k$ så sätter vi $a_k = a_{k-1}$ och kallar den under halvan av I_k för I_{k+1}.

4. Ser ni något mönster? Är a_k växande? Begränsad från ovan? Kommer $\lim_{k\to\infty} a_k$ att konvergera mot något, säg mot x_0?

5. Betrakta intervallen $I_2, I_3, I_4, ...$ Observera att $I_2 \supset I_3 \supset I_4 \supset ...$ och att den övre gränsen till intervallet I_k är en övre begränsning för $f(x)$. Kan ni se i grafen att c_k går mot en minsta övre begränsning till $f(x)$?

6. Diskutera utifrån grafen och se om ni kan övertyga er om att $f(x_0) = \lim_{k\to\infty} f(a_k) =^3 \lim_{k\to\infty} c_k =$ minsta övre begränsning till V_f.

7. Försök hitta en begränsad funktion $f(x)$ på $[0, 1]$ så att det inte finns något $x_0 \in [0, 1]$ så att $f(x) \leq f(x_0)$ för alla $x \in [0, 1]$. Kan $f(x)$ vara kontinuerlig?

Hemuppgift: Läs igenom Definitionen 1 (sidan 136), i Persson-Böiers, och Sats 1 (Satsen om Mellanliggande värden) och Sats 3 i Appendix C i Persson-Böiers.

[3] Eftersom $f(a_k) = c_k$.