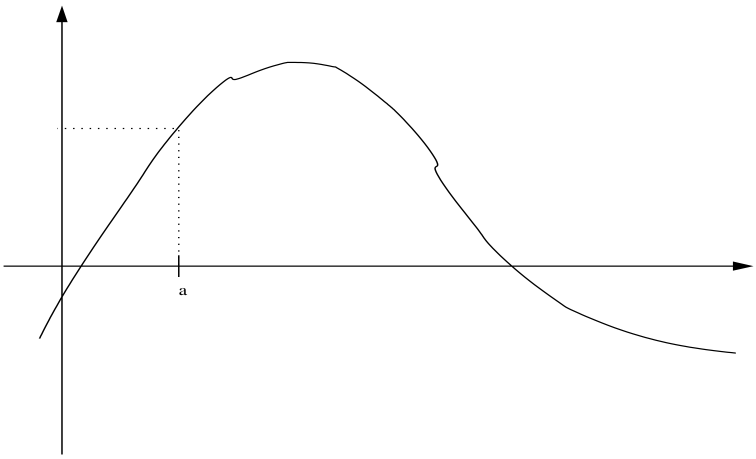
Teoriövning 2, derivator.

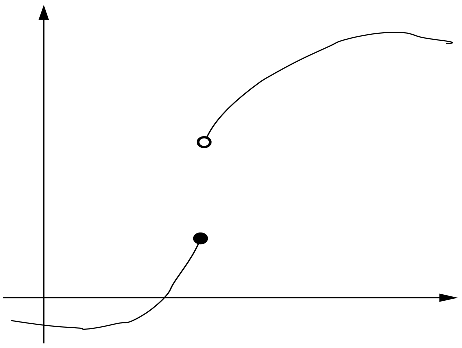
Del 1: Derivatans teori.

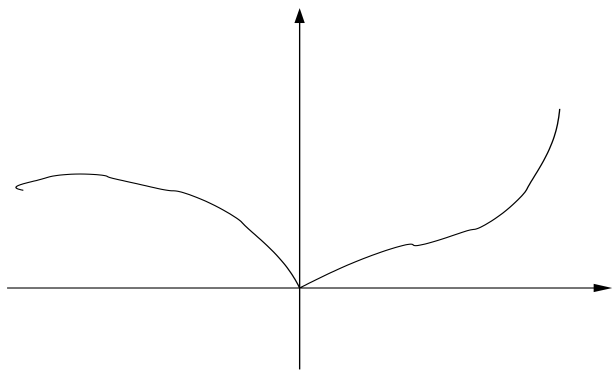
Fråga 1. Derivatans definition. Betrakta följande graf av den deriverbara funktionen $f(x)$:



1. Markera punkten $a + h$ på $x-$axeln där $|h|$ är litet och antingen positivt eller negativt.
2. Verifiera att den linjära funktionen $L_h(x) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}(x - a) + f(a)$ skär grafen i punkterna $a + h$ och a. Dvs $L_h(a) = f(a)$ och $L_h(a + h) = f(a + h)$.
3. Rita in några till räta linjer $L_h(x)$ för mindre och mindre h (som kan vara > 0 eller < 0). Verifiera intuitivt att $\lim_{h\to 0} L_h(x)$ konvergerar till en tangent till $f(x)$ i punkten a. Vad konvergerar riktningskoefficienten $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ till?

Fråga 2. [Icke deriverbara funktioner.] Betrakta följande funktioner:

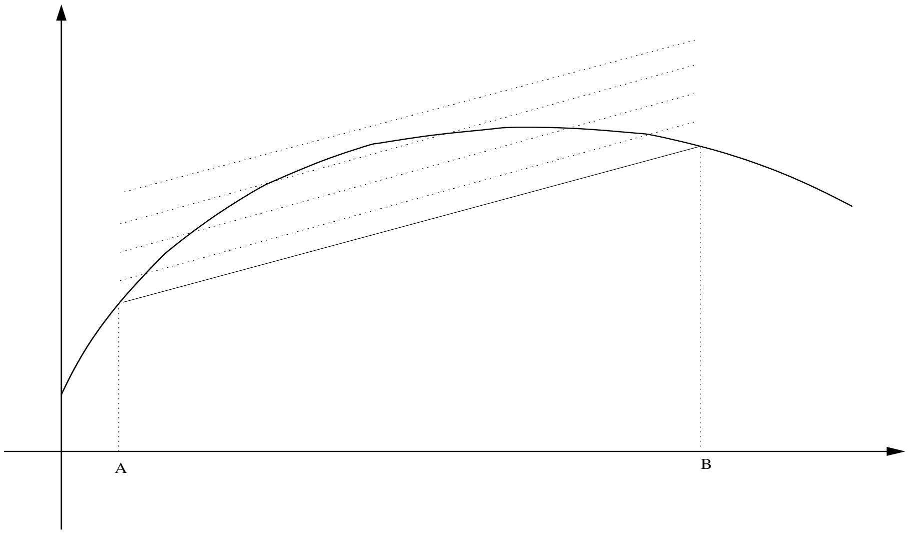




1. Försök att göra samma analys som i fråga 1 för den vänstra grafen med punkten a i diskontinuitetspunkten.
   (a) Kommer riktningskoefficienten att konvergera?
   (b) Är diskontinuerliga funktioner i allmänhet deriverbara?
2. Försök att göra samma analys som i fråga 1 för den högra grafen med punkten $a = 0$.
   (a) Kommer du att få samma tangent när $h \to 0^+$ (d.v.s. när du har positiva $h \to 0$) som när $h \to 0^-$?
   (b) Konvergerar $\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$?
   (c) Är $|x|$ deriverbar i $x = 0$, om ni inte kan svara direkt så rita en graf och återupprepa ovanstående analys.

Fråga 3. [Medelvärdessatsen] Ni kan hoppa över de teoretiska bitarna i den här frågan om ni vill.

1. Medelvärdessatsen säger att om en funktion, såsom $f(x)$ i grafen nedan, är deriverbar på $[A, B]$ så finns det en punkt $x_0 \in [A, B]$ så att $f(B) - f(A) = f'(x_0)(B - A)$. Er uppgift är att skissa ett bevis för satsen.



2. Rita ut en linje som är parallell med $\frac{f(B)-f(A)}{B-A}x$ (såsom de streckade linjerna i bilden ovan) så att linjen skär grafen i **en** punkt. Markera den punkten med x_0 på $x-$axeln.

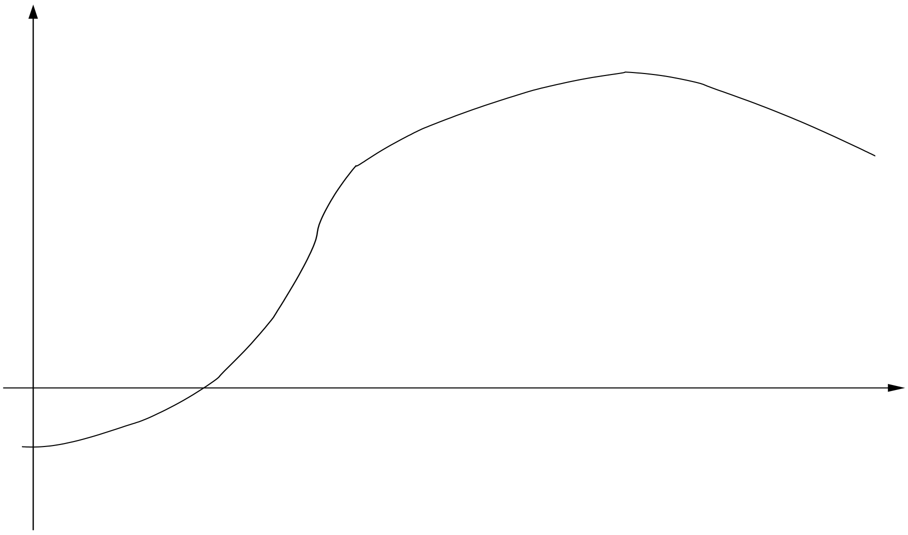
3. Linjen kommer att ges av uttrycket $y = \frac{f(B)-f(A)}{B-A}x+C$ för något C. Hur vet vi att ett sådant C existerar? (*Ledtråd*: Supremumegenskapen.)

4. Rita nu ut linjer $L_h(x)$ som skär grafen i punkterna x_0 och $x_0 + h$ såsom i fråga 1. Kan man säga något om riktningskoefficienten till $L_h(x)$ för $h > 0$, för $h < 0$? Specifikt kommer riktningskoefficienten för $L_h(x)$ att vara större eller mindre än $\frac{f(B)-f(A)}{B-A}$? Kan ni bevisa det med formler?

5. Kommer $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq \frac{f(B)-f(A)}{B-A}$ eller $\leq \frac{f(B)-f(A)}{B-A}$? Vad gäller för $h \to 0^-$? (*Ledtråd*: Gränsövergång i olikhet.)

6. Vad är $f'(x_0)$?

Fråga 4. [Derivatans tecken och monotona funktioner.] En viktig del av den matematik vi utvecklar är att se att den överensstämmer med vår intuition. Vi vill att derivatan skall vara relaterad till hur en funktion förändras. Speciellt att $f'(x) > 0$ om f är växande och $f'(x) < 0$ om f är avtagande.



1. Markera på $x-$axeln de värden där ovanstående graf är växande respektive avtagande.

2. Välj någon punkt x_0 och x_0+h så att båda ligger i det intervallet där $f(x)$ är växande. Vilket tecken har riktningskoefficienten för linjen $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}(x - x_0) + f(x_0)$ som skär grafen i båda punkterna? Vilket tecken får derivatan i x_0, d.v.s. gränsvärdet $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

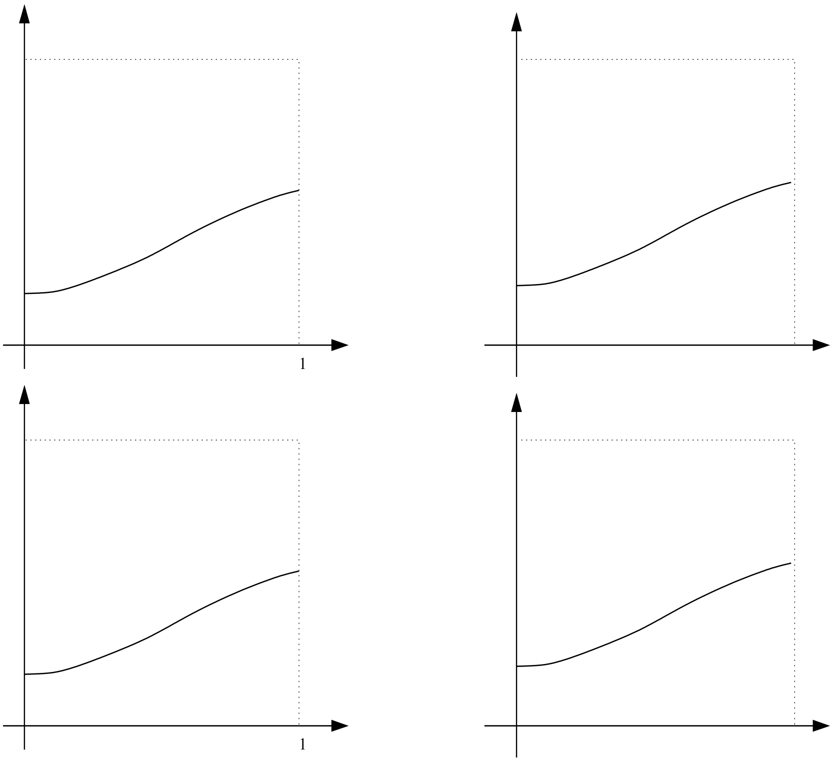
3. Gör samma sak i intervallet där $f(x)$ avtar.

4. Kan du formulera en sats om derivatans relation till koncepten *"växande"* och *"avtagande"*? Kan du bevisa den?[1]

[1] Kanske inte nu, utan när ni kommer hem; eller nu - om ni vill.

Del 2: Derivatan iteration och konvergens.

Fråga 5. [Contracting mapping principle] Nedan hittar du fyra exemplar av en funktion $f(x)$ från $[0,1]$ till $[0,1]$ så att derivatan $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$.

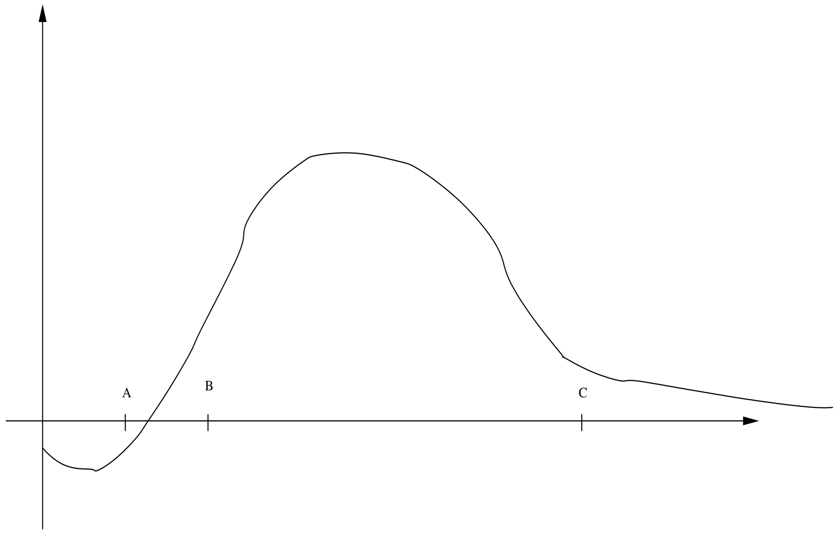


1. Markera värdemängden V_f på $y-$axeln i den första grafen. Dvs alla de värden som $f(x)$ kan anta.
2. I den andra grafen markera V_f på $x-$axeln och sedan alla värden $f(x)$ för $x \in V_f$. Observera att detta är $V_{f(f(x))}$.
3. Fortsätt på samma sätt och markera $V_{f(f(x))}$ på $x-$axeln i den tredje grafen och markera sedan alla värden $f(x)$ för $x \in V_{f(f(x))}$, d.v.s. markera $V_{f(f(f(x)))}$, eller för att förenkla lite $V_{f^3(x)}$, på $y-$axeln. Markera slutligen $V_{f^4(x)}$ på $y-$axeln i den fjärde grafen.
4. Ser ni något mönster i V_f, V_{f^2}, V_{f^3}, V_{f^4}.... Kan ni se att $V_{f^n(x)}$ krymper till en punkt då $n \to \infty$?[2]
5. Rita in linjen $x = y$ i den första grafen och kalla $x-$värdet för skärningspunkten $f(x) = y$ för x_0. Kommer $x_0 \in V_f$? Kommer $x_0 \in V_{f(f(x))}$? Och kommer $x_0 \in V_{f^n}$ för alla n?[3] Varför?
6. Välj något godtyckligt värde $x_1 \in [0,1]$ och rita in det i den första grafen. Rita in $f(x_1)$, $f(f(x_1))$ etc. Ser det ut som att $f^n(x_1)$ konvergerar? I så fall till vad?
7. Kan ni hitta en algoritm för att lösa ekvationen $x = f(x)$ då $|f'(x)| < \frac{3}{4}$? Tex hur man kan lösa $x = \frac{1}{10}\cos(\pi x)$?

[2]Faktum är att om $x, y \in V_{f^n}$ så kommer, enligt medelvärdessatsen, $|f(x) - f(y)| \leq |f(\xi)||x-y| \leq \frac{3}{4}|x-y|$. Härifrån så är det ganska lätt att, med hjälp av induktion, visa att längden av V_{f^n} är mindre än $\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$. Prova gärna!

[3]Svaret skall vara: Ja. Men graferna är små så det kan vara svårt att se.

Fråga 6. [Newton-Raphsons metod.] Nedan hittar ni en graf av en deriverbar funktion $f(x)$. Vi vill lösa ekvationen $f(x) = 0$.



1. Välj punkten A och rita in tangenten till grafen i punkten A. Och kalla skärningen för tangenten med $x-$axeln för A_1. Tangenten ges, som vi vet, av ekvationen $f'(A)(x-A)+f(A)$. Kan du beräkna A_1 i termer av A, $F(A)$ och $f'(A)$?

2. Rita in tangenten till $f(x)$ i punkten A_1 och kalla punkten där tangenten skär $x-$axeln för A_2. Kan du beräkna A_2?

3. Fortsätt att rita in A_3, A_4, ... ser A_k ut att konvergera? I så fall till vad?

4. Varför är det här viktigt?

5. Gör samma sak som för A men med startpunkterna B och C. Konvergerar de också? Vad kan man dra för slutsats?

Del 3: Tolkning av satser.

Fråga 8. Använd det karakteristiska polynomet för att hitta lösningen, $y(x)$, till följande differentialekvation

$$\begin{aligned}
&y''(x) - 4y(x) = 0 \qquad \text{för } x > 0\\
&y(0) = 0\\
&y'(0) = 4.
\end{aligned}$$

Dvs ni skall hitta en funktion $y(x)$ som uppfyller ovanstående tre ekvationer.

1. Kan ni lösa talet? Om inte hur hittar ni vad det karakteristiska polynomet är.

2. Kan ni hitta en sats som talar om hur man använder det karakteristiska polynomet för att hitta lösningar till differentialekvationer?[4]

3. Vad säger satsen? Hjälper den er att avgöra hur lösningen hur lösningen skall se ut?

4. Hur bestämmer man värdet av konstanterna C_1 och C_2? Titta på de ekvationer som y måste uppfylla och se om det hjälper er att beräkna C_1 och C_2.

5. Beräkna $y''(x) - 4y(x)$ samt $y(0)$ och $y'(0)$ för att verifiera att er lösning verkligen löser ekvationerna.

6. Om ni kan lösa ovanstående tal, dvs om ni kan ta ett tal som ni inte kan lösa, hitta rätt sats om talet, tolka och använd satsen för att hitta en lösning så kan ni lösa alla tal i den här kursen. Finns det något tal som ni inte alls har kunnat lösa tidigare så titta på det talet tillsammans. Vilka satser skulle behövas? Kan ni hitta, tolka och använda dessa satser?

[4] Sats 2 på sidan 389 i Persson-Böiers upplaga 3:3 kan vara en bra start.