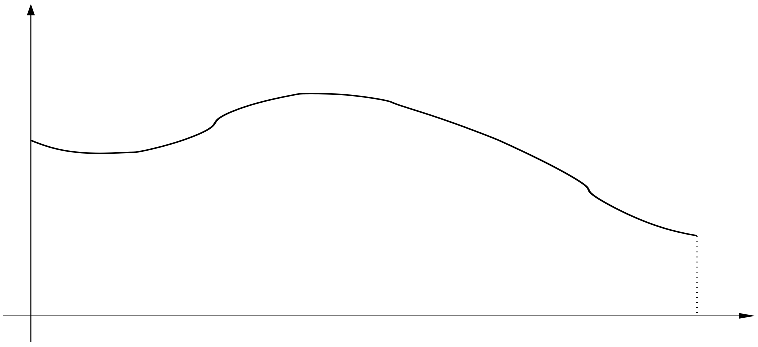
Teoriövning 3, Integraler.

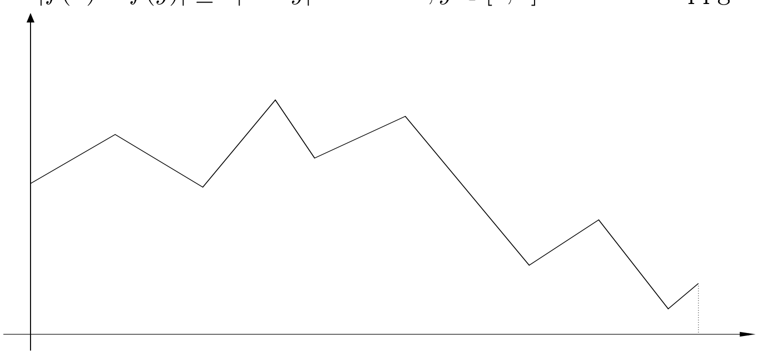
Fråga 1.[INTEGRALENS DEFINITION.] Den här uppgiften ämnar att gestalta att Riemann integralen intuitivt ger oss ytan under en graf. Betrakta nedanstående bild, av en funktion $f(x)$ definierad på $[0,1]$, och gör följande uppgifter.

1. Approximera ytan under grafen med hjälp av ca 10 rektanglar på formen $\check{R}_j = \{a_{j-1} < x < a_j,\ 0 < y < c_j\}$. Välj era rektanglar så att ni är säkra på att den approximativa arean är mindre än arean under grafen.
2. Skriv Upp ett uttryck för arean av alla rektanglar, och kalla uttrycket L.
3. Gör samma sak som i 1 och 2 men den här gången välj era rektanglar, $\hat{R} = \{a_{j-1} < x < a_j,\ 0 < y < C_j\}$ så att ni är säkra på att den approximativa ytan är större än ytan under grafen. Kalla uttrycket för den större ytan U.
4. Markera ytan $\epsilon = U - L > 0$ i grafen. Försök övertyga varandra att "den riktiga ytan undergrafen" skiljer sig som mest med ϵ från värdena på U och L. Observera att vi kan med enkel grundskolematematik beräkna U och L.
5. Övertyga er att om vi kan, genom att öka antaler rektanglar, göra ϵ godtyckligt litet[1] så kan vi också hitta godtyckligt bra approximationer till ytan under grafen. Vad händer om $\epsilon \to 0$?

Jämför detta med definitionen av Riemann integralen (Definition på sidan 296 i Persson-Böiers).



Fråga 2. [SKATTNING AV INTEGRALER.] Eftersom de flesta integraler är för svåra för att beräkna så är det lika viktigt att kunna uppskatta integraler som det är att lösa dem. Nedan så hittar ni en graf av en funktion $f(x)$ definierad på $[0,3]$ så att $|f(x) - f(y)| \leq 2|x-y|$ för alla $x, y \in [0,3]$. I den här uppgiften ska vi försöka att uppskatta $\int_0^3 f(x)dx$.



1. Dela in $[0,3]$ i N intervall $\left]0, \frac{3}{N}\right[, \left]\frac{3}{N}, \frac{2\cdot 3}{N}\right[, \ldots, \left]\frac{3N-1}{N}, 3\right[$ (säg $N \approx 10$ i grafen).
2. Rita in två trappfunktioner $\Psi(x) \geq f(x) \geq \Phi(x)$ i grafen där trappfunktionerna har ovanstående intervall som indelning.
3. Vad är det största värdet som $|f(x) - f(y)|$ kan ha om x och y ligger i samma intervall? Vilket är det minsta talet δ så att vi kan säkert kan välja Ψ och Φ så att $0 \leq \Psi(x) - \Phi(x) \leq \delta$?
4. Givet N hur stort kan $I(\Psi) - I(\Phi)$ vara som störst?[2]
5. Om ni vill beräkna $\int_0^3 f(x)dx$ med ett maximalt fel på $\frac{1}{20}$, hur många intervall måste ni ha i er indelning i Riemann summan?
6. **Svårare.** Kan ni i allmänhet bevisa att om $|f'(x)| \leq M$ på intervallet $[0,b]$ så kommer $\left|\int_a^b f(x)dx - \sum_{j=1}^N f(jb/N)\frac{b}{N}\right| \leq \frac{Mb^2}{N}$?[3]

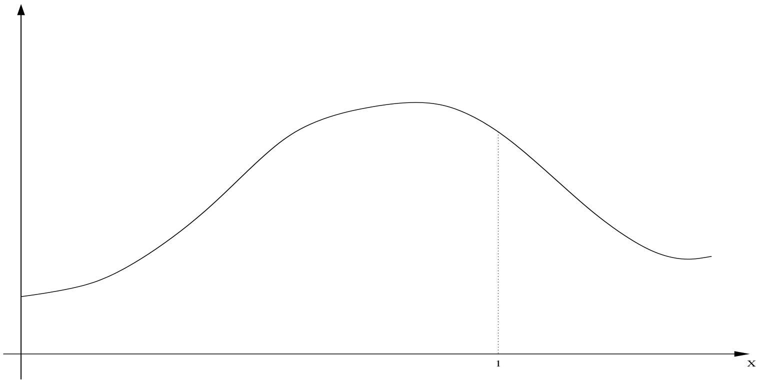
---

[1] Dvs att för varje $\epsilon > 0$ kunna hitta ett ändligt antal rektanglar så att $U - L < \epsilon$.
[2] Ni borde kunna härleda att $I(\Psi) - I(\Phi) \leq \frac{18}{N}$.
[3] Med hjälp av en dator kan man alltså beräkna integralen med godtycklig exakthet - och också vara säker på hur stort felet blir om man bara kan beräkna maxvärdet på derivatan.

7. **Svårare.**Givet en funktion $f(x)$ på $[a,b]$, antag att det finns en funktion $\sigma(\epsilon) > 0$ på $]0.1]$ så att $\lim_{\epsilon\to 0^+} \sigma(\epsilon) = 0$ så att om $|x-y| < \sigma(\epsilon)$ så $|f(x)-f(y)| < \epsilon$. Visa att, givet $\epsilon > 0$, det existerar två trappfunktioner $\Psi_\epsilon(x) \geq f(x) \geq \Phi_\epsilon(x)$ så att $I(\Psi_\epsilon) - I(\Phi_\epsilon) \leq 2\epsilon(b-a)$, kan ni dra slutsatsen att $f(x)$ är integrerbar?[4]

8. Antag att $f(x)$ är likformigt kontinuerlig på $[a,b]$. Visa att en funktion $\sigma(\epsilon)$ som i föregående fråga existerar och dra slutsatsen att likformigt kontinuerliga funktioner är integrerbara på slutna begränsade intervall.[5]

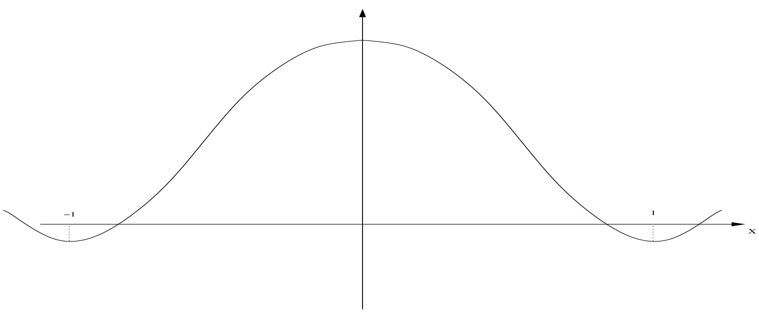
Fråga 3. [Analysens Huvudsats.] Låt $F(x) = \int_0^x f(x)dx$ där $f(x)$ är den kontinuerliga funktion vars graf är plottad i bilden nedan.



1. Markera ytan som representeras av $F(1) = \int_0^1 f(x)dx$ i grafen ovan.
2. Låt h vara ett litet tal och markera ytan som representeras av $F(1+h)$ i grafen ovan.
3. Vilken yta anger skillnaden $F(1+h) - F(1)$? Rita in en rektangel R med bas $[1, 1+h]$ som har samma yta som skillnaden $F(1+h) - F(1)$ i grafen.
4. Finns det något värde $\xi_h \in [1, 1+h]$ så att höjden av R ges av $f(\xi_h)$?[6]
5. Argumentera att $\frac{1}{h}(F(1+h) - F(1)) = f(\xi_h)$. Vad blir gränsvärdet $\lim_{h\to 0} \frac{F(1+h)-F(1)}{h}$?

Fråga 4. [Jämna och udda funktioner.] Det är väldigt vanligt, speciellt i flervariabelanalysen, att man använder sig av en funktions symmetri för att förenkla integralberäkningar. Specifikt så låter sig integralen av udda funktioner förenklas på ett enkelt sätt.

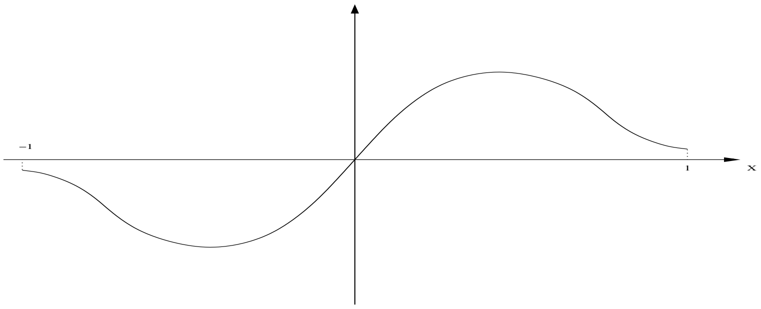
1. Nedan så finns grafen av en jämn och kontinuerlig funktion $f(x)$. Kom ihåg att jämn betyder att $f(x) = f(-x)$ för alla $x \in D_f$. Gör en approximation av $f(x)$ med hjälp av två trappfunktioner $\Phi(x) \leq f(x) \leq \Psi(x)$ för $x \in [0,1]$. Visa sedan att, genom att rita in $\Phi(-x)$ och $\Psi(-x)$ för $x \in [-1,0]$ att $\Phi(-x) \leq f(-x) \leq \Psi(-x)$ (observera att ni här använder att f är en jämn funktion).
2. Kan ni använda detta för att övertyga er om att integralen av en jämn och integrerbar funktion $f(x)$ definierad på $[-a,a]$ uppfyller
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$$



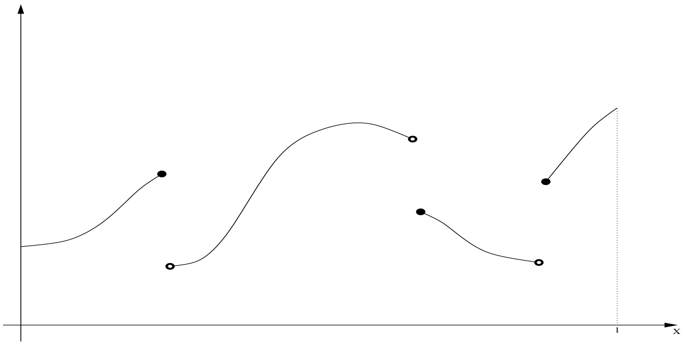
3. Nedan så hittar ni grafen av en udda funktion (udda betyder att $f(x) = -f(-x)$). Kan ni göra motsvarande analys som i föregående deluppgifter. Vilken regel gäller för $\int_{-a}^{a} f(x)dx$ då $f(x)$ är en udda funktion.

[4]Ledtråd: Dela in $[a,b]$ i ändligt många intervall $]a_{j-a}, a_j[$ så att $(a_j - a_{j-1}) \leq \sigma(\epsilon)$. Rita gärna en bild.
[5]Ledtråd: Antagandet om likformig kontinuitet säger att man kan hitta ett $\delta > 0$ för varje $\epsilon > 0$ så att.... Ni söker en funktion $\sigma(\epsilon)$, d.v.s. ett värde $\sigma(\epsilon) > 0$ för varje $\epsilon > 0$ så att....
[6]Se integralkalkylens medelvärdessats, Sats 7 sidan 307 i Persson-Böiers.

4. Beräkna $\int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos^2(x^4)} \sin(\sin(x))dx$? LEDTRÅD: *Är funktionen jämn/udda?*



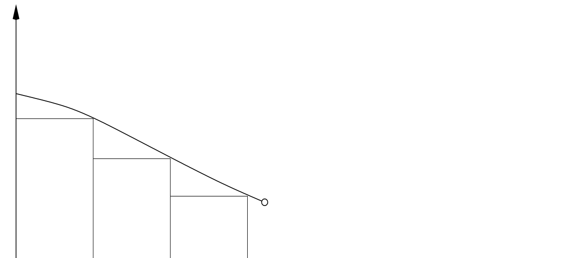
Fråga 5. [INTEGRERING AV DISKONTINUERLIGA FUNKTIONER.] Nedan så hittar ni grafen av en funktion $f(x)$ som är diskontinuerlig i tre punkter α, β och γ men kontinuerlig i resten av $[0,1]$. Vi frågar oss om $f(x)$ är integrerbar.



1. Vad måste ni bevisa för att bevisa att $f(x)$ är integrerbar?
2. Om ni har besvarat föregående fråga riktigt så vet ni att vi behöver, för varje $\epsilon > 0$, hitta två trappfunktioner Ψ_ϵ och Φ_ϵ så att $\Phi_\epsilon(x) \le f(x) \le \Psi_\epsilon(x)$ och $I(\Psi_\epsilon) - I(\Phi_\epsilon) < \epsilon$.
3. Dela upp intervallet $[0,1]$ i sju delar, $[0, \alpha - \delta]$, $[\alpha - \delta, \alpha + \delta]$, $[\alpha + \delta, \beta - \delta]$, $[\beta - \delta, \beta + \delta]$, $[\beta + \delta, \gamma - \delta]$, $[\gamma - \delta, \gamma + \delta]$ och $[\gamma + \delta, 1]$, för något litet $\delta > 0$.
4. Existerar följande integraler $\int_0^{\alpha-\delta} f(x)dx$, $\int_{\alpha+\delta}^{\beta-\delta} f(x)dx$, $\int_{\beta+\delta}^{\gamma-\delta} f(x)dx$ och $\int_{\gamma+\delta}^{1} f(x)dx$. Varför? Vad betyder det i termer av trappfunktioner? - rita gärna in trappfunktioner i grafen.
5. Kan ni göra en uppskattning av ett största värde som $\int_{\alpha-\delta}^{\alpha+\delta} f(x)dx$, $\int_{\beta-\delta}^{\beta+\delta} f(x)dx$ och $\int_{\gamma-\delta}^{\gamma+\delta} f(x)dx$ kan antaga. Tex genom att innesluta arean som integralerna representerar i lämpliga rektanglar.[7]
6. Kan ni visa att $f(x)$ är integrerbar på $[0,1]$?

Fråa 6. [INTERGALER AV MONOTONA FUNKTIONER.] Följande argument återfinns i Newtons Principia från 1687[8] Vårt mål är att bevisa att varje begränsad och avtagande funktion är integrerbar.

Nedan så hittar ni en graf av en avtagande funktion $f(x)$ på $[a,b]$ och en approximation av $f(x)$ underifrån med en trappfunktion $\Phi(x)$. Vi har valt indelningen $a < a_1 < a_2 < ... < a_k = b$ så att $a_j - a_{j-1} = \frac{b-a}{k}$ för alla $j = 1, 2, ..., k$.



1. Vad måste ni bevisa för att bevisa att $f(x)$ är integrerbar?

---

[7] Ni borde kunna skatta arean av varje integral med en rektangel med maximal area $2\delta \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

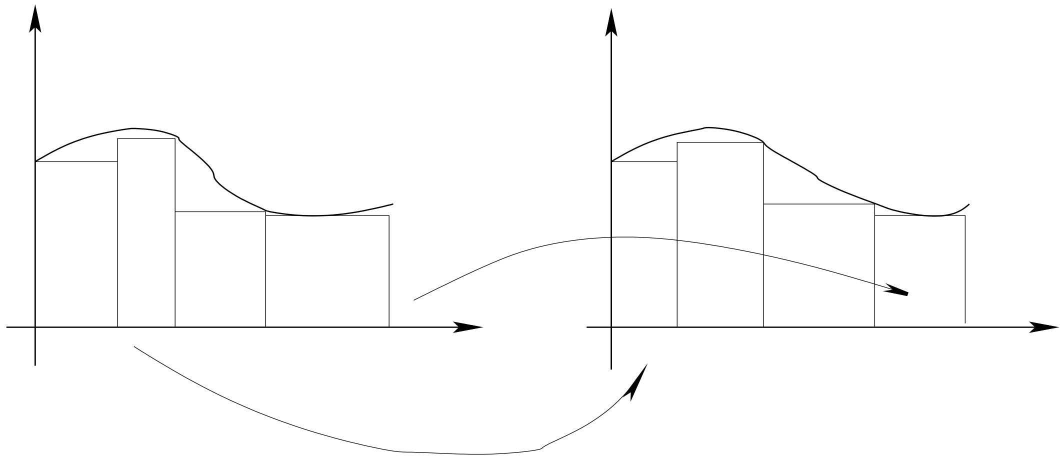
[8] Newton kände inte till Riemanns definition av integralen från 1854 så vi konceptualiserar beviset annorlunda. Men idéen är den samma.

2. Rita motsvarande trappfunktion $\Psi(x)$ som approximerar integralen från ovan - *använd samma indelning* $a < a_1 < a_2 < ... < a_k = b$.
3. Markera ytan som representerar skillnaden $I(\Psi) - I(\Phi)$ i grafen.
4. Kan hela ytan som representerar skillnaden rymmas i någon rektangel i grafen av $\Psi(x)$?
5. Hitta ett uttryck för ytan av den rektangeln och därmed en uppskattning på $I(\Psi) - I(\Phi)$.
6. Vad händer när $k \to \infty$?
7. Kan ni bevisa att varje avtagande och begränsad funktion på ett begränsat intervall är integrerbar?
8. Är följande funktion integrerbar på $[0, 1]$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{j} & \text{för } x \in \left[1 - \frac{1}{j}, 1 - \frac{1}{j+1}\right[\\ 0 & \text{om } x = 1. \end{cases}$$

Observera att $f(x)$ är diskontinuerlig i oändligt många punkter $1 - \frac{1}{j}$.

Fråga 7. [Geometrin Bakom Variabelbyten.] I den här uppgiften så kommer vi att undersöka geometrin bakom formeln för variabelbyten. Uppgiften är lite bakvänd och lider av vissa grava missbildningar - men vi kommer fram till rätt formel i slutet. Till hjälp så har vi följande bild.



Den vänstra bilden visar grafen av en funktion $f(x)$ och en approximation av ytan $\int_a^b f(x)dx$ med hjälp av en trappfunktion med indelningen $a = a_0 < a_1 < a_2 < ... < a_k = b$. Till hörger så har vi grafen av $f(t)$ och en approximation av ytan under grafen $\int_{g(a)}^{g(b)} f(g^{-1}(t))dt$ med indelingen $g(a) = g(a_1) < g(a_2) < ... < g(a_k) = g(b)$. Funktionen g är deriverbar och växande och pilarna indikerar att g tar a_j till punkten $g(a_j)$ på $t-$axeln

1. Om den j :te rektangeln i den vänstra grafen har arean $(a_j - a_{j-1})f(x_j)$ visa att arean av den j :te rektangeln har arean $(g(a_j) - g(a_{j-1}))f(g^{-1}(t_j))$ där $t_j = g(x_j)$.
2. Använd medelvärdessatsen för att dra slutsatsen att ytan av den j :te rektangeln i den högra grafen har ytan $(a_j - a_{j-1})g'(\xi_j)f(g^{-1}(t_j)) = (a_j - a_{j-1})g'(\xi_j)f(x_j)$ för något $\xi_j \in [a_{j-1}, a_j]$.
3. Rita in rektanglar med bas $[a_{j-1}, a_j]$ och höjd $g'(\xi_j)f(x_j)$ i den vänstra grafen. Observera att den totala ytan ni precis har ritat in i den vänstra grafen är samma som ytan under trappfunktionen i den högra grafen.
4. Om ni låter indelningen $a = a_0 < a_1 < a_2 < ... < a_k = b$ bli oändligt fin. Vilken integral motsvarar ytan i den högra grafen? Vilken integral motsvarar ytan som ni ritade in i föregående steg i den vänstra grafen?
5. Kan ni använda detta för att visa att

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(g^{-1}(t))dt.$$

Skriv inget bevis utan övertyga er själva om likhetens sanning.

6. Försök att titta igenom argumentet i den här uppgiften och se om ni kan förstå vad $g'(x)$ termen kommer ifrån. Den kompenserar i någon mening för hur mycket $x-$axeln sträcks i avbildningen $x \mapsto t$.