Uppgifter vecka 47 SF1602 Diff. Int.

John Andersson johnan@kth.se

1 (Läsning inför F21) *(17e November)*: Läs kapitel 7.5 0ch 7.9 i Person-Böiers.

2 (Kortfrågor inför F21):

i) Om $f(x)$ är en kontinuerlig funktion på $\mathbb{R}$ så att $f(x) \leq 10$ kommer då $\int_{-2}^{1} f(x)dx \leq 30$? Kommer $\int_{-2}^{1} f^2(x)dx \leq 300$?

ii) Om $f(x)$ är en kontinuerlig funktion på $]0, \infty[$ så att $|f(x)| \leq |x|^\alpha$ för alla $x > 0$. För vilka värden på $a > 0$ och α kommer $\int_a^\infty |f(x)|^2 dx$ garanterat att vara konvergent?

iii) Är sats 11 på sidan 316 sats sann utan antagandet $f \geq 0$?

iv) **Svår?** Låt $f(x)$ vara integrerbar på $[-1, 1]$ och $f(0) = 0$. Är den generaliserade integralen $\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{x} dx$ konvergent om $f(x)$ är begränsad? Kontinuerlig (Ledtråd: Är $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|\ln(|x|)|} & \text{om } x \neq 0 \\ 0 & \text{om } x = 0 \end{cases}$ kontinuerlig?)? Deriverbar?

v) Antag att $f(x)$ är kontinuerlig på $[0, 1]$ och att den generaliserade integralen $\int_0^1 \frac{|f(x)|}{x} dx$ konvergerar. Kommer då $\int_0^1 \frac{|f(x)|^2}{x} dx$ att konvergera?

3 (Läsning inför F22) *(19e November)*: Vi kommer att sammanfatta teorin för integraler kap 6, 7.1-7.5 och 7.9 i Person-Böiers.

4 (Kortfrågor inför F22):

vi) Vi vet att $1 - |x|$ inte är primitiv funktion till någon funktion definierad på $[-1, 1]$ (eftersom derivatan av $1 - |x|$ inte är definierad i $x = 0$). Men finns det någon funktion $f(x)$ så att $1 - |x| = \int_{-1}^{x} f(t)dt$? Reflektera!

vii) Vilken kurva i planet är $(\sin(t), \cos(t))$ för $t \in [0, 2\pi[$? Vilken kurva är $(2\sin(t), 3\cos(t))$ för $t \in [0, 2\pi[$? Vilken kurva är $(\sin(t), \cos(t))$ för $t \in [0, 4\pi[$?

viii) Rotationsvolymen som fås när området mellan grafen av den kontinuerliga funktionen $f(x)$, $a \leq x \leq b$ roteras kring $x-$axeln är noll. Vad är $f(x)$?

ix) Finns det någon rotationssymmetrisk kropp given av en deriverbar funktion $f(x)$ på $[0, \infty[$ så att kroppens yta är oändlig men dess volym ändlig?

x) Finns det någon rotationssymmetrisk kropp given av en begränsad och deriverbar funktion $f(x)$ på $[0, \infty[$ så att kroppens volym är oändlig men dess yta ändlig?
Ledtråd: *Eftersom $f'(x)^2 \geq 0$ så kommer $\sqrt{1 + f'(x)^2} \geq 1$.*

5: Uppgifter Vecka 47.

Medelsvåra uppgifter: *Från föreläsning 21-22:* 7.32, 7.33, 7.35, 7.46, 7.48, 7.49, 7.50, 7.51, 7.54, 7.60, 7.61, 7.64, 7.73

Svåra uppgifter: *Från föreläsning 21-22:* 7.57, 7.65

Förslag på uppgifter till övningen: Mitt förslag på uppgifter som övningsledarna skall räkna på övningen den här veckan är ett par av följande **7.34, 7.47, 7.58**.

7: Bevisuppgift 1 (Hölders olikhet): Bevisa Hölders olikhet. Dvs om $f(x)$ och $g(x)$ är kontinuerliga på $[-1, 1]$ så

$$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx \leq \left(\int_{-1}^{1} f(x)^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_{-1}^{1} g(x)^2 dx\right)^{1/2}.$$

Använd gärna följande steg:

1. Visa att $\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx \leq \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^1 f(x)^2dx + \int_{-1}^1 g(x)^2dx\right)$.

   LEDTRÅD: *Kan du visa olikheten utan integraltecknen?*

2. Bevisa att om $\int_{-1}^1 f(x)^2dx = 1$ och $\int_{-1}^1 g(x)^2dx = 1$ så kommer $\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx \leq 1$.

   LEDTRÅD: *Föregående steg.*

3. Beteckna $\|f\|_{L^2(-1,1)} = \left(\int_{-1}^1 f(x)^2dx\right)^{1/2}$ och låt $\tilde{f}(x) = \frac{1}{\|f\|_{L^2(-1,1)}}f(x)$ samt $\tilde{g}(x) = \frac{1}{\|g\|_{L^2(-1,1)}}g(x)$. Kan man använda föregående steg på $\tilde{f}$ och $\tilde{g}$? Vad betyder det för f och g?

8: Bevisuppgift 2 (Osäkerhetsprincipen): Bevisa att om $f(x)$ är kontinuerligt deriverbar på $[-1,1]$, $f(-1) = f(1) = 0$ och $\int_{-1}^1 f(x)^2dx = 1$ så gäller följande olikhet:

$$\int_{-1}^1 x^2 f(x)^2dx \int_{-1}^1 f'(x)^2dx \geq \frac{1}{4}.$$

LEDTRÅD: *Kan du använda partiell integration på $\int_{-1}^1 f(x)^2dx = 1$ tillsammans med Hölders olikhet?*

9. Kontorstid: Onsdagen den 19e November kl 12-13 (Direkt efter föreläsningen.) i mitt kontor två trappor över studentexpeditionen på matematik. Ring 7214 på porttelefonen utanför dörren för att bli insläppta.

Efter F21-F22 skall du kunna.

1. Du skall ha en god förståelse för Riemann integralen och dess tillämpningar.

2. Du ska kunna tillämpa interalkalkyl för att beräkna areor, volymer (rotationskroppar), längder av kurvor på parameterform samt areor av rotationsytor.

3. Du skall kunna visa om serier är konvergenta eller divergenta med hjälp av integralskattningar.