Uppgifter vecka 48 SF1602 Diff. Int.

John Andersson johnan@kth.se

1 (Läsning inför F23) *(25e November)*: Läs kapitel 8.1 och 8.2 i Person-Böiers.

2 (Kortfrågor inför F23):

vi) En termostat ser till att temperaturen, $T(t)$, i tidpunkten t förändras enligt $T'(t) = 20 - T(t)$ vilka är de temperaturer som termostaten håller konstant.

vii) Skriv ner en differentialekvation vars lösning $y(x)$ växer då $y(x) \leq -1$, avtar då $y(x) > 1$ och inte förändras (med avseende på x) då $y(x) = 1/2$.

viii) Låt $f(x)$ vara en given kontinuerlig funktion på $\mathbb{R}$. Kommer $y(x) = \int_0^x f^2(t)dt$ att lösa differentialekvationen $y'(x) = f^2(x)$?

ix) Låt $G(x)$ vara en deriverbar funktion och $h(x)$ en kontinuerlig funktion på $\mathbb{R}$. Vilken differentialekvation löser $y(x) = e^{-G(x)} \left(\int h(x)e^{G(x)}dx \right) + Ce^{-G(x)}$?

3 (Läsning inför F24) *(27e November)*: Läs 8.3-8.5 i Persson-Böiers.

4 (Kortfrågor inför F24):

i) Vilka av följande ekvationer är separabla: $y^3(x)y'(x) = \cos(x)$, $y'(x) + 3x^2y(x) = e^x$, $(x^2+1)y'(x) = y(x)\ln(|x|)$. Vad gör separabla ekvationer viktiga?

ii) Vilken deriveringsregel gör separabla ekvationer förhållandevis enkla att lösa?

iii) Rita vektorfältet $(1, y^2 + x)$, dvs en skiss av $xy-$planet där punkten (x, y) förses med vektorn $(1, y^2 + x)$. Skissa sedan lösningen till $y'(x) = y^2 + x$ i samma talplan.

iv) Låt $g(y) > 0$ vara en kontinuerlig funktion på $\mathbb{R}$ med primitiv funktion $G(x)$. Vilken differnetial ekvation löser $y(x) = G^{-1}(x) \left(\int h(x)dx + C \right)$?

v) Vilken sats från integralkalkylen är den fundamentala satsen för att lösa integralekvationen $y(x) = \int_0^x g(t)y(t)dt$?

5: Uppgifter Vecka 48.

Lätta uppgifter: *Från föreläsning 23:* 8.1, 8.4, 8.5ad
Från föreläsning 24: 8.25

Medelsvåra uppgifter: *Från föreläsning 23:* 8.2ad, 8.3, 8.6ad, 8.7, 8.8ac *Olika tillämpningar:* 8.11, 8.13, 8.18, 8.19
Från föreläsning 24: 8.21ad, 8.22, 8.23ace, 8.34, 8.36 *Olika tillämpningar:* 8.26, 8.28, 8.30, 8.32

Svåra uppgifter: *Från föreläsning 23:* 8.17

Förslag på uppgifter till övningen: Mitt förslag på uppgifter som övningsledarna skall räkna på övningen den här veckan är ett par av följande **8.10, 8.23**. Andra halvan av övningen kommer att vara en **teoriövning** i grupper för de som vill.

6: Bevisuppgift 1: [Leibnitz kriterium.] Antag att $a_1, a_2, a_3, a_4, ...$ är en sekvens av reella tal så att

i) $a_n \geq 0$ för alla n

ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

iii) a_n är avtagande, dvs $a_{n+1} \leq a_n$ för alla n.

Då kommer $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ att konvergera. Bevisa detta!
Du får gärna använda följande steg:

1. Sätt $S(k) = \sum_{n=1}^{k}(-1)^{n+1}a_k$ och konstatera att vi vill bevisa att $\lim_{k\to\infty} S(k)$ existerar. (Detta är ju definitionen för att summan $\sum_{n=1}^{k}(-1)^{n+1}a_k$ ska vara konvergent.)

2. Bevisa att $S(2k+1) \geq S(2k+2) \geq S(2k) \geq 0$.

3. Bevisa att $S(2k+1) \leq S(2k-1)$. Dra slutsatsen att $S(1) \geq S(2k+1)$ för alla k.

4. Använd Steg 2 och 3 för att bevisa att sekvensen $S(2), S(4), S(6), ..., S(2k), S(2k+2), ...$ är en växande och uppåt begränsad sekvens. Kan vi dra några slutsatser om växande och uppåt begränsade sekvenser?

5. Använd att $S(2k) = S(2k-1) - a_{2k}$ för att bevisa att $\lim_{k\to\infty} S(2k-1) = \lim_{k\to\infty} S(2k)$ och slutför ditt argument.

7. VIKTIGT! Kontrollskrivning 3-4 kommer att gå den 15e December och anmälan öppnar den 24e November. Anmäl dig så snart som möjligt! Anmälan till tentamen är öppen sen den 14e November. Anmäl dig NU!

8. Kontorstid: Onsdagen den 26e November kl 9-10 i mitt kontor två trappor över studentexpeditionen på matematik. Ring 7214 på porttelefonen utanför dörren för att bli insläppta.

Efter F23-F24 skall du kunna.

1. Du skall ha en intuitiv förståelse av va den differentialekvation är. D.v.s. du ska ha en känsla för hur de kan tillämpas och du ska kunna rita upp vektorfält och tolka differentialekvationer geometriskt.

2. Du skall kunna identifiera linjära differentialekvationer av första ordningen (d.v.s. känna igen en given differential ekvation som en första ordningens linjär ekvation). Du skall även kunna härleda lösningsformen och använda den för att lösa linjära differentialekvationer av första ordningen.

3. Du skall kunna identifiera separabla differential ekvationer, härleda och tillämpa lösningsformeln.

4. Du ska ha en viss känsla för andra ordningens linjära differentialekvationer med konstanta koefficienter. Vi kommer att diskutera dem mer nästa vecka.

5. Du ska ha en förståelse för superpositionsprincipen och för hur den används. Superpositionsprincipen är väldigt viktig då den hjälper oss att lösa linjära differentialekvationer genom att hitta partikulär och homogena lösningar separat.

6. Du ska ha en viss känsla för vad integralekvationer är och hur de löses.