Uppgifter vecka 38 SF1602 Diff. Int.

John Andersson johnan@kth.se

1 (Läsning inför F5): Läs avsnitt 2.1-2.3 i Persson-Böjers. Läs avsnitt 2.1 i Persson-Böjers igen!

2 (Kortfrågor inför F5):

i) Gäller följande påstående: "Om gränsvärdet $\lim_{x\to c} f(x)$ inte existerar så existerar inte $\lim_{x\to c} f^2(x)$."?

ii) Antag att $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$ och $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$, vad är $\lim_{x\to 1} f(x)$?

iii) Om $\lim_{x\to 3} \frac{f(x)}{g(x)} = 2$ följer det då att $\lim_{x\to 3} f(x) = 2\lim_{x\to 3} g(x)$?

iv) Antag att det existerar ett $\delta > 0$ så att $|f(x) - \pi| < \frac{1}{100}$ för alla x så att $|x-2| < \delta$. Följer det att det finns ett $\delta > 0$ så att $|f(x) - \pi| < \frac{1}{10}$ för alla x så att $|x-2| < \delta$?

v) Antag att det existerar ett $\delta > 0$ så att $|f(x) - 3| < \frac{1}{100}$ för alla x så att $|x-2| < \delta$. Följer det att det finns ett $\delta > 0$ så att $|f(x) - 2| < \frac{1}{10}$ för alla x så att $|x-2| < \delta$?

vi) Antag att det för varje $\delta > 0$ finns ett $\epsilon_\delta > 0$ så att $|f(x) + 2| < \epsilon_\delta$ för alla x så att $|x+7| < \delta$. Följer det att $\lim_{x\to -7} f(x) = -2$?

vii) Vilka av följande påståenden är sanna för varje funktion $f(x)$ definierad på de reella talen

a) $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ implicerar att $\lim_{x\to 0} f(2x) = 0$,

b) $\lim_{x\to \infty} f(x) = 0$ implicerar att $\lim_{x\to \infty} f(2x) = 0$,

c) $\lim_{x\to 3} f(x) = 0$ implicerar att $\lim_{x\to 3} f(2x) = 0$?

3 (Läsning inför F6): Läs avsnitt 2.4-2.5 i Persson-Böiers.

4 (Kortfrågor inför F6):

i) Vi vet att, för säg alla $q > 0$ och $a > 1$, $\frac{x^q}{\ln(x)} \to \infty$ och att $\frac{a^x}{x^q} \to \infty$ då $x \to \infty$. Så x^q, växer mot oändligheten snabbare än $\ln(x)$ men a^x växer snabbare än x^q. Men vilken funktion, om någon, går mot oändligheten snabbast av alla funktioner?

ii) Antag att $f(x) > g(x)$ för alla $x \in (0,1)$. Följer det att $\lim_{x\to 1^-} f(x) > \lim_{x\to 1^-} g(x)$?

iii) Antag att $\lim_{x\to 5} f(x) = 0$ följer det att $\lim_{x\to 5} \frac{1}{f(x)} = \infty$?

iv) Antag att $\lim_{x\to 5} f(x) = \infty$ följer det att $\lim_{x\to 5} \frac{1}{f(x)} = 0$?

v) Antag att $f(x)$ är kontinuerlig på $[0,1)$. Vilka av följande gränsvärden existerar garanterat:

a) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$?

b) $\lim_{x\to 1-} f(x)$?

c) $\lim_{x\to 1/2} f(x)$?

b) $\lim_{x\to 1/2} \frac{f(x)}{|f(x)|}$?

vi) Om $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$ vad är $\lim_{x\to c} \sin(f(x))$?

vii) Antag att $f(x)$ och $g(x)$ är kontinuerliga på $[-3,\infty)$ vilka av följande gäller

a) $f(x) + g(x)$ är kontinuerlig.

b) $f(x)g(x)$ är kontinuerlig.

c) $\frac{f(x)}{g(x)}$ är kontinuerlig.

5: Uppgifter Vecka 38.

Lätta: *Från föreläsning 5:* 2.17
Från föreläsning 6: Sorry, de flesta uppgifter den här veckan är inte superlätta.

Medelsvåra: *Från föreläsning 5:* 2.1bcd, 2.2, 2.3 2.4, 2.5, 2.8, 2.11, 2.12, 2.14, 2.16, 2.18
Från föreläsning 6: 2.22, 2.25, 2.26, 2.36, 2.38, 2.39, 2.51, 2.52

Svåra: *Från föreläsning 5:* 2.6, 2.7, 2.9, 2.10
Från föreläsning 6: 2.29, 2.31, 2.48

6: Bevisuppgift 1: Bevisa att exponentialfunktionen a^x definierad för alla $x \in \mathbb{Q}$ är strikt växande i x om $a > 1$.

7: Bevisuppgift 2 (svår). Bevisa att om $a > 1$ så är kommer funktionen $f(n) = (a)^{1/n}$ som är definierad från $\mathbb{N}$ till $\mathbb{R}$ att satisfiera följande: $\lim_{n\to\infty} f(n) = 1$ utan att använda att exponentialfunktionen är kontinuerlig. Med andra ord: bevisa att $\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$.

Förslagsvis så använder gör du ditt bevis i följande steg:

1. Drag slutsatsen att $a^{1/n} > 1$, dvs $a^{1/n} - 1 > 0$.
2. Definiera $a_n = a^{1/n} - 1$ och visa att $a^{1/n} \to 1$ om och endast om $a_n \to 0$
3. Visa att $a = (1 + a_n)^n$, använd sedan binomialsatsen för att visa att $0 < a_n < \frac{a-1}{n}$.
4. Använd föregående steg till att visa att $a_n \to 0$.

Bevisa sedan att a^x är kontinuerlig på $\mathbb{Q}$. LEDTRÅD: *Du måste visa att* $\lim_{x\to x_0} (a^x - a^{x_0}) = \lim_{h\to 0} \left(a^{x_0+h} - a^{x_0}\right) = 0$ *för alla* $x_0 \in \mathbb{Q}$.

8. Kontorstid: Torsdagen den 18e September klockan 13 på mitt kontor (Matteinstitutionen två trappor över elevexpeditionen, ring (kortnummer 7214) på telefonen utanför korridoren så släpper jag in er).

Kontorstiden är en tid då jag finns tillgänglig i mitt kontor för att besvara eventuella frågor om kursen eller matematik i allmänhet.

Efter den här veckan skall du kunna.

De första fyra punkterna är det viktigaste.

1. Kunna och förstå definitionen av gränsvärde ($\epsilon - \delta$ definitionen).
2. Beräkna standardgränsvärden (Tex $\lim_{x\to\infty} \frac{2^x+x^4+\ln(x)}{e^{2x}+x^2\sin(x^3)}$ och liknande. Helst så skall du direkt kunna se att svaret på föregående gränsvärde är noll på ett par sekunder.)
3. Kunna använda och bevisa Sats 1-5 sidan 140-141 i Persson-Böiers (Summa, produkt och kvotregeln, Sammansättningsregeln, instängningsregeln, regeln om gränsövergång i olikhet).
4. Fårstå definitionen av kontinuitet och bevisa att enkla funktioner är kontinuerliga eller diskontinuerliga.
5. Ha elementär förståelse av talet e.
6. Kunna rita grafer med hjälp av definitionen av gränsvärde och asymptoter.
7. Ha en elementär förståelse av rekusion och intervallhalvering.