Uppgifter vecka 39 SF1602 Diff. Int.

John Andersson johnan@kth.se

1 (Läsning inför F7): Läs appendix C i Persson-Böiers.

2 (Kortfrågor inför F7):

i) Antar följande funktioner sitt maxima
a) $f(x)$ är kontinuerlig och strikt växande på $[2,7[$?
b) $f(x)$ är kontinuerlig och strikt avtagande på $[2,7[$?

ii) Låt x_k vara en talföljd på $\mathbb{R}$ finns det något tal $y \in \mathbb{R}$ och en delföljd x_{k_j} så att $\lim_{j\to\infty} x_{k_j} = y$?

iii) Om $f(x)$ och $g(x)$ är funktioner definierade på $[0,1]$ vilka av följande garanterar att $f(x) = g(x)$ har en lösning? Vilka utesluter möjligheten till en lösning?
a) $f(x)$ och $g(x)$ är kontinuerliga och $f(0) < g(0)$ och $f(1) \geq g(1)$?
b) $f(x)$ är kontinuerlig och $f(0) < g(0)$ och $f(1) \geq g(1)$?
c) $f(x)$ är kontinuerlig och $g(x)$ är växande och $f(0) < g(0)$ och $f(1) \geq g(1)$?

iv) Ge ett exempel på en funktion som är kontinuerlig på sin definitionsmängd men inte likformigt kontinuerlig.

v) Vi vet att om $f(x)$ är kontinuerlig på ett slutet begränsat intervall $[a,b]$ så är $f(x)$ likformigt kontinuerlig på $[a,b]$ men finns det funktioner som är likformigt kontinuerliga på hela $\mathbb{R}$?

3 (Läsning inför F8): Vi kommer att fortsätta att diskutera appendix C och det extra övningshäftet om serier som finns att ladda ner på kurshemsidan.

4 (Kortfrågor inför F8):

i) Vilka av följande serier är konvergenta:
a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$? **b)** $\sum_{k=1}^{\infty} a^k$?
c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$?

ii) Om $f(x)$ antar sitt minimum på $[-1,1]$ kommer $f(x)^2$ att antaga sitt maximum på $[-1,1]$?

iii) Har sekvensen $\sin(1), \sin(2^2), \sin 3^2, ..., \sin(k^2), ...$ en konvergent delföljd?

iv) På något sätt så har en badboll (med diameter 1 meter) fastnat och blockerat den 8706551 meter långa öst-västliga pipelinen från Xinjiang till Shanghai. Det enda sättet som huvudingengören kan komma på att hitta badbollen är att såga av pipelinen i mitten och kolla vilken halva som är blockerad, såga av den halvan på mitten och så vidare tills han till sist hittar badbollen (genom att såga igenom den). Hitta ett ungefärligt uttryck för hur många gånger han som mest behöver såga av pipelinen innan han hittar badbollen? Vad har detta att göra med Bolzano-Weiersrass Sats?[1]

5: Uppgifter Vecka 39.

Medelsvåra: *Från föreläsning 7:* 2.19, 2.20, 2.21
Från föreläsning 8: Alla uppgifter från Thunbergs häfte - går att ladda ner från kurshemsidan.

Teoriseminarium: Eftersom vi har diskuterat mycket teori de senaste veckorna så kommer vi att fokusera på teorifrågor på övningen den här veckan. Det innebär att ni kommer att få en extra uppgiftslapp med teorifrågor som skall lösas i grupp på övningen.

6: Bevisuppgift: I förra veckans bevisuppgift så bevisade vi att a^x är strikt växande och kontinuerlig på de rationella talen $\mathbb{Q}$. Den här veckan så ska vi definiera exponentialfunktionen för alla reella tal och bevisa att den är kontinuerlig. Uppgiften är ganska svår och abstrakt men gör ett försök och om det känns svårt så hoppa till nästa delfråga. Just nu så tränaar vi bara på bevis och abstrakt tänkande. Att misslyckas och sen se ett bevis är bra träning. Ett bevis där jag kommer att försöka förklara hur man tänker kommer att publiceras på kurshemsidan. Med det är ett svårt och abstrakt bevis!

Vi antar att $a > 1$ och att a^x är väldefinierad för alla $x \in \mathbb{Q}$.

[1] Okay, det är en löjlig fråga. Men den har en poäng.

1. Vi måste börja med att definiera vad vi menar med a^x för $x \in \mathbb{R}$. Det enda som skiljer $\mathbb{R}$ från $\mathbb{Q}$ är supremumegenskapen så definiera

$$a^x = \sup_{q\in\mathbb{Q}, q<x} a^x \qquad \text{för alla } x \in \mathbb{R}.$$

   Tänk noga igenom den här definitionen och varför den är meningsfull.

2. Bevisa att

$$S = \sup_{q\in\mathbb{Q}, q<x} a^x = \inf_{q\in\mathbb{Q}, x<q} a^x = I \qquad \text{för alla } x \in \mathbb{R}.$$

   LEDTRÅD: *Om det inte är sant så kommer $S = I + \delta$ för något $\delta > 0$ så det finns inga $q_1 < x$ och $q_2 > x$ så att $a^{q_2} - a^{q_1} < \delta$. Titta på förra veckans bevisuppgift. Försöka att förstå ledtråden.*

3. **Svår!** Bevisa att a^x är kontinuerlig på $\mathbb{R}$.

4. Bevisa att $V_{a^x} = \{x;\ x > 0\}$.

   LEDTRÅD: *Vi vet att $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$ och $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$. Vi vill bevisa att om $0 < A < \infty$ så finns det ett $x \in \mathbb{R}$ så att $a^x = A$ (dvs $A \in V_{a^x}$). Vad säger satsen om mellanliggande värden?*

5. **Svår!** Bevisa att a^x är strikt växande på $\mathbb{R}$.

7. Kontorstid: Torsdagen den 25e September klockan 12 på mitt kontor (Matteinstitutionen två trappor över elevexpeditionen, ring (kortnummer 7214) på telefonen utanför korridoren så släpper jag in er).

Kontorstiden är en tid då jag finns tillgänglig i mitt kontor för att besvara eventuella frågor om kursen eller matematik i allmänhet.

VIKTIGT: Fredagen den 3e Oktober kl 8-10 så har vi kursens första KS (Kontrollskrivning, dvs ett prov). Ni måste anmäla er till KSen före den 28 September. Utan anmälan så finns risken att ni inte får skriva KSen (vilket är det samma som att bli underkänd). Anmäl er nu via "Mina Sidor".

Efter den här veckan skall du kunna.

1. Kunna och förstå definitionen $\epsilon - \delta$ relationen mellan $\epsilon - \delta$ definitionen och kontinuitet. Specifikt att det är via $\epsilon - \delta$ definitionen som vi kan bevisa alla bra egenskaper som vi förväntar oss av kontinuerliga funktioner.

2. Förstå supremumegenskapen och hur reella tal skiljer sig från rationella.

3. Förstå bevisen av samtliga satser i appendix C i Persson-Böiers. (Det är 13 sidor, men de är väldigt abstrakta.)

4. Ha en grundläggande förståelse för teorin om serier och kunna avgöra om enkla serier är konvergenta eller divergenta.