Uppgifter Torsdag/Fredag av vecka 45 SF1602 Diff. Int.

John Andersson johnan@kth.se

1 (Läsning inför F17) *(6e November)*: Läs kapitel 6.1-6.2 i Person-Böiers, läs också om avsnittet om likformig kontinuitet i appendix C. Vi kommer förmodligen inte att hinna allt eftersom vi också kommer att sammanfatta kapitel 5 under föreläsningen.

2 (Kortfrågor inför F17):

i) Om $f(x)$ är begränsad kommer $\int f(x)dx$ att vara kontinuerlig? Deriverbar?

ii) Låt $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{om } x \text{ är rationellt} \\ 1 & \text{om } x \text{ inte är rationellt} \end{array} \right\}$ kommer $f(x)$ att vara Riemann integrerbar?

iii) Är $f(x) = e^{\cos(x)x^x} - 718\cos(\sin(x))4^{38+x^{918}}$ integrerbar på intervallet $[-10^{10}, 10^{20^{30}}]$.

iv) Låt $f(x)$ vara en begränsad funktion på intervallet $[-3,3]$ och $\Psi_k(x)$ en sekvens trappfunktioner så att $\Psi_0(x) \leq \Psi_1(x) \leq \Psi_2(x) \leq ... \leq f(x)$. Kommer $\lim_{k\to\infty} \int_{-3}^{3} \Psi_k(x)dx$ att konvergera?

v) Finns det någon funktion $f(x)$ som är definierad på $[0,1[$ och $\lim_{x\to 0^-} f(x) \to \infty$ men $f(x)$ är Riemann integrerbar? Kan du beräkna $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx$? Reflektera!

3 (Läsning inför F18) *(7e November)*: Läs kapitel 6.3-6.4 i Person-Böiers.

4 (Kortfrågor inför F18):

i) Kommer $\lim_{t\to y} \left[\frac{d}{dt}\int_0^{\sin(t)} \arcsin(x)dx\right] = y\cos(y)$ för alla $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$?

ii) Om $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \sin(x) & \text{för } x \neq 0 \\ 1 & \text{för } x = 0 \end{array} \right.$ kommer då $f'(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \cos(x) & \text{för } x \neq 0 \\ 0 & \text{för } x = 0 \end{array} \right.$?

iii) Antag att $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -1$ och $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$ för någon integrerbar funktion $f(x)$ definierad på $[0,2]$. Vad är $\lim_{\epsilon\to 0} \int_{1-\epsilon}^{1+\epsilon} f(x)dx$?

iv) Vad är $\lim_{x\to\infty} \int_x^{x+1} e^{\frac{t^2-1}{t^2}} dt$?

v) Vad är $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \arctan x dx$?

4: Uppgifter Vecka 45. Att beräkna integraler är, p.g.a. analysens huvudsats, i princip samma sak som att hitta primitiva funktioner. Jag skulle därför föreslå att ni också tittar på tal från kapitel 5 som ni inte har hunnit göra än.

Lätta uppgifter: *Från föreläsning 17:* 6.1,
Från föreläsning 18: 6.11

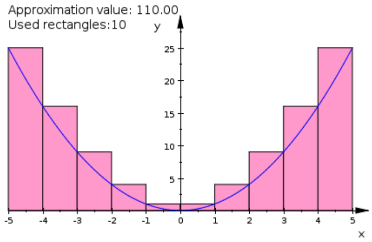
Medelsvåra uppgifter: *Från föreläsning 17:* 6.2, 6.4
Från föreläsning 18: 6.3, 6.7, 6.12ab, 6.13, 6.14, 6.15ac, 6.16, 6.37, 6.38, 6.43, 6.45

Svåra uppgifter: *Från föreläsning 17:*
Från föreläsning 18: 6.5, 6.9, 6.17ac, 6.18, 6.19

Förslag på uppgifter till övningen: Mitt förslag på uppgifter som övningsledarna skall räkna på övningen den här veckan är **6.8, 6.15bd, 6.50**.

4. Bevisuppgift: (Jag erkänner, jag är för lat för att skriva en ny uppgift. Så jag återanvänder en uppgift som jag använde i England förra året.)
In this exercise we will calculate the integral $\int_0^t ax^2dx$ from first principles.

1. Draw the graph of $y = ax^2$, for $0 \leq x \leq t$ and $a > 0$, as in the picture below ($a = 1$, $t = 5$ in the picture). Also draw n rectangles with base$= \frac{t}{n}$ as in the picture ($n = 10$ in the picture we are



however only interested in the 5 rectangles to the right of the $y-$axis).

2. Conclude that the area under the graph $y = ax^2$, $0 \leq x \leq t$ is estimated from above by

$$A \leq \sum_{k=1}^{n} a \left(\frac{kt}{n}\right)^2 \times \frac{t}{n} = at^3 \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2, \tag{1}$$

where A denotes the area and each term in the sum is the area of one rectangle (base times height).

3. Redraw the diagram but this time with the rectangles underneath the graph and argue that

$$A \geq at^3 \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n-1} k^2. \tag{2}$$

4. Use induction to show that

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

5. Let $n \to \infty$ in (1) and (2) and conclude that the area under the graph is $A = a\frac{t^3}{3}$. That is

$$\int_0^t ax^2 dx = a\frac{t^3}{3}.$$

Efter F16-F17 skall du kunna.

1. Ha en förståelse för Riemann-integralens definition.
2. Kunna bevisa att kontinuerliga funktioner på slutna och begränsade intervall är integrerbara.
3. Kunna och kunna bevisa analysens huvudsats och insättningsformeln.
4. Kunna beräkna svåra integraler.