Uppgifter vecka 46 SF1602 Diff. Int.

John Andersson johnan@kth.se

1 (Läsning inför F19) *(11e November)*: Läs kapitel 6.5 i Person-Böiers.

2 (Kortfrågor inför F19):

i) Om $f(x)$ är kontinuerlig på $[0,1]$ kan man då skriva $\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{k}f(n/k)$ på ett enklare sätt?

ii) Om $f(x)$ är kontinuerlig på $[-1,1]$ och $-1 = x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_n < x_{n+1}... < 1$ är punkter så att $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$ kommer då $\sum_{n=1}^{\infty}|x_{n+1}-x_n|f(x_n) = \int_{-1}^{1} f(x)dx$?

iii) Om $f(x)$ är kontinuerlig på $[0,\infty]$ kommer då $\int_0^\infty f(x)dx$ att existera? Kommer, för varje tal $a, b \in \mathbb{R}$, $b > a \geq 0$, $\int_a^b f(x)dx$ att existera?

iv) Låt $f_1, f_2, f_3, ...$ vara en oändlig mängd kontinuerliga funktioner definierade på $[0,1]$, kommer då $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1\sum_{n=1}^{\infty} f(x)dx$?

v) Om $f(x)$ är integrerbar och begränsad på $[-5,5]$ finns det då ett tal c så att $10c = \int_{-5}^{5} f(x)dx$? Finns det ett $x_c \in [-5,5]$ så att $f(x_c) = c$?

3 (Läsning inför F20) *(12e November)*: Läs kapitel 7.1-7.4 i Person-Böiers.

4 (Kortfrågor inför F20):

vi) För vilka integrerbara funktioner $f(x)$ gäller $\left|\int_{-3}^{4} f(x)dx\right| = \int_{-3}^{4}|f(x)|dx$?

vii) Antag att $f(x)$ och $g(x) \geq 0$ är deriverbara på $[0,\infty]$, vad är $D\int_0^{g(x)} f(x)dx$? Kan vi försvaga något antagande och dra samma slutsats?

viii) Om $f(1) = -1$ och $\int_1^5 f'(x)dx = 2$ vad är $f(5)$?

ix) Gäller den generaliserade medelvärdessatsen utan antagandet $g \geq 0$? Om inte hitta på ett motexempel.

x) Om $f(x)$ är kontinuerlig på $[a,b]$ så $D\int_a^x f(t)dt = f(x)$ enligt analysens huvudsats. Låt

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{om } x < 0 \\ 0 & \text{om } x = 0 \\ 1 & \text{om } x > 0 \end{cases}$$

och $F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)dt$. För vilka x är $F'(x)$ definierad, vad är värdet av $F'(x)$ i dessa punkter? Är höger respektive vänsterderivatan definierad, vad är värdet av höger och vänsterderivatan i så fall?

5: Uppgifter Vecka 46. Att beräkna integraler är, p.g.a. analysens huvudsats, i princip samma sak som att hitta primitiva funktioner. Jag skulle därför föreslå att ni också tittar på tal från kapitel 5 som ni inte har hunnit göra än.

Lätta uppgifter: *Från föreläsning 20:* 7.1, 7.5, 7.6, 7.8, 7.9

Medelsvåra uppgifter: *Från föreläsning 19:* 6.13c, 6.17b, 6.22, 6.24, 6.25a, 6.26ad, 6.27, 6.29ac, 6.30a, 6.31cd
Från föreläsning 20: 7.2, 7.10, 7.11, 7.14, 7.16, 7.17, .23, 7.24, 7.27

Svåra uppgifter: *Från föreläsning 19:* 6.32b, 6.33ab, 6.41, 6.43, 6.48
Från föreläsning 20: 7.20, 7.29

Förslag på uppgifter till övningen: Mitt förslag på uppgifter som övningsledarna skall räkna på övningen den här veckan är ett par av följande **6.25b, 6.28, 6.33de, 7.13, 7.26** dock inte alla.

6: Bevisuppgift: Antag att $f(x)$ är definierad på $[-1,1]$, $f(x) \geq 0$ och att $f(x)$ är integrerbar.

1. Visa att om $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0$ och om $f(x)$ är kontinuerlig så är $f(x) = 0$ på två sätt:

(a) Genom Integralkalkylens Medelvärdessats.

(b) Genom att använda integralens definition och definitionen av kontinuitet.

LEDTRÅD: *Motsägelseargument.*

2. Visa att kontinuitetsantagandet är nödvändigt genom att visa att $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0$ för

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{för } x \neq 0 \\ 1 & \text{för } x = 0, \end{cases}$$

dvs. $f(x) \neq 0$ och $f(x) \geq 0$ men integralen är noll.

7. Kontorstid: Måndagen den 10e November kl 12-13 (Den enda möjliga tiden innan KS2.) i mitt kontor två trappor över studentexpeditionen på matematik. Ring 7214 på porttelefonen utanför dörren för att bli insläppta.

Efter F19-F20 skall du kunna.

1. Veta vad en generaliserad integral är. Och kunna definitionen för konvergenta och divergenta generaliserade integraler.
2. Kunna avgöra om en generaliserad integral är konvergent eller divergent genom direkt beräkning eller genom användandet av jämförelsesatser.
3. Kunna använda integralen för att beräkna ytor begränsade av funktioner.
4. Kunna beräkna volymen av rotationskroppar samt längden av kurvor på parameterform.