Matematiska Institutionen, KTH

Tentamensskrivning på kursen Linjär algebra, SF1604, för CDATE, CTFYS och vissa CL, onsdagen den 10 juni 2015 kl 08.00-13.00.

Examinator: Olof Heden.

OBS: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen. Bonuspoäng förvärvade under läsåret 2014-2015 får användas. Den som har b bonuspoäng får använda högst fem av dessa poäng för att uppnå maximalt 15 poäng på del I. Till poängsumman på del II och del III adderas sedan det största av talen $b-5$ och 0.

För full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

Betygsgränser: (Totalsumma poäng är 40p.)

13	poäng totalt eller mer ger minst omdömet	Fx
15	poäng totalt eller mer ger minst betyget	E
20	poäng totalt eller mer ger minst betyget	D
25	poäng totalt eller mer ger minst betyget	C
30	poäng totalt eller mer ger minst betyget	B
35	poäng totalt eller mer ger betyget	A

DEL I

1. (5p) Bestäm de värden på talet a för vilka nedanstående ekvationssystem

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x + az = 1 \\ ay - 2z = 2 \end{cases}$$

har ingen, precis en respektive oändigt många lösningar. Ange också lösningarna i de fall antalet lösningar är oändligt många.

2. (a) (2p) Det finns ett reellt tal α sådant att $(1+i)^{23} = \alpha(1-i)^{-15}$. Bestäm talet α.

   (b) (3p) Visa med ett induktionsbevis att talet 12 delar $7^{2n} - 5^{2n}$ för alla positiva hela tal n.

3. (5p) (ON-system) Låt π_1 beteckna planet med ekvationen $x + 2y + 3z = 6$, och π_2 ett plan genom punkterna $(0, 1, 1)$ och $(1, 0, -1)$ och vinkelrätt mot planet π_1. Låt ℓ beteckna skärninglinjen mellan planen π_1 och π_2. Bestäm avståndet från punkten $P = (1, 1, 1)$ till linjen ℓ. (Dellösningar kommer att ge delpoäng.)

DEL II

4. Matrisen $\mathbf{A}$ har egenvärdena $1, 2$ och 3. Egenvektorer som hör till dessa egenvärden är, respektive
$$\mathbf{v}_1 = (1 \;\; 1 \;\; -1)^T, \quad \mathbf{v}_2 = (2 \;\; 1 \;\; 0)^T, \quad \mathbf{v}_3 = (-2 \;\; -2 \;\; 3)^T.$$
   (a) (3p) Bestäm matrisen $\mathbf{A}$.
   (b) (2p) Bestäm $\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + 3\mathbf{v}_3)$.

5. Betrakta vektorrummet $\mathcal{P}$ bestående av alla polynom med reella koefficienter. Vi inför en inre produkt $\langle\, p(t) \mid q(t)\rangle$ i vektorrummet $\mathcal{P}$ genom
$$\langle\, p(t) \;\mid\; q(t) \,\rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t) \,\mathrm{dt}\,.$$
   Bestäm projektionen av polynomet t^3 på det delrum L till $\mathcal{P}$, som spänns upp av polynomen $-1 + t + 2t^2$ och t.

6. (5p) För vilka reella tal b och c finns det en linjär avbildning A från R^3 till R^3 sådan att A avbildar vektorn $(3, 2, 1)$ på vektorn $(3, b, c)$, och som är sådan att snittet mellan A:s kärna och A:s bildrum är det delrum till R^3 som genereras av $(1, 2, 3)$, och sådan att $A \circ A$ är nollavbildningen, dvs
$$A(3, 2, 1) = (3, b, c), \quad \ker(A) \cap \operatorname{im}(A) = \operatorname{span}\{(1, 2, 3)\}, \quad A \circ A(\bar{x}) = \bar{0},$$
   för alla vektorer $\bar{x} \in R^3$.

   (**OBS** Motivera ditt svar noggrant, avsaknad av korrekt argumentering resulterar i poängavdrag.)

DEL III (Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigvis ordagrant, där de används i lösningen.)

7. (a) (1p) Betrakta vektorrummet R^5 och låt $U = \operatorname{span}\{(1, 1, 1, 1, 0), (0, 1, 2, -1, 2)\}$, och $V = \operatorname{span}\{(1, 0, 1, 0, -2), (-3, 1, 1, 1, -1)\}$. Visa att det finns ett 3-dimensionellt delrum W till R^5 som innehåller V och vars skärning med U är nollvektorn, dvs $V \subseteq W$ och $W \cap U = \{\bar{0}\}$.
   (b) (4p) Ge nödvändiga och tillräckliga villkor för att det till två delrum U och V till ett ändligtdimensionellt vektorrum L finns ett delrum W till L sådant att
$$W \cap U = \{\bar{0}\}, \qquad V \subseteq W, \qquad \dim(U) + \dim(W) = \dim(L).$$
   Motivera väl!

8. (5p) I vanliga 3-dimensionella rummet R^3 är det lätt att förstå innebörden av att två punkter befinner sig på olika sidor om ett 2-dimensionellt delrum till R^3. I högre dimensioner är det kanske svårare att se detta. Skriv, berätta och diskutera om det går att generalisera bergreppet ”på olika sidor om ett delrum” till högre dimensionell geometri. Betrakta även det oändligtdimensionella fallet. Om en generalisering är möjlig så försök också ge en formel med vars hjälp man kan avgöra om två punkter P och Q ligger på olika sidor om ett delrum L.